

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Заболоцький М. В., Фединяк С. І., Філевич П. В.

Практикум з математичного аналізу

для студентів факультету прикладної математики
та інформатики. Частина 2.



Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2006

УДК 517.1(076)+517.2(076)
ББК В161 я73-4
З-12

Рецензенти:

Олег Георгійович Сторож, д-р фіз.-мат. наук
(Львівський національний університет імені Івана Франка);
Марта Тимофіївна Бордуляк, канд. фіз.-мат. наук
(Львівський національний університет імені Івана Франка)

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
механіко-математичного факультету
Протокол N 8 від 22 березня 2006 року

Заболоцький М. В., Фединяк С. І., Філевич П. В.
З-12 Практикум з математичного аналізу. Частина 2. Заболоць-
кий М. В., Фединяк С. І., Філевич П. В. – Львів: Видавничий
центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006. – 68 с.

У практикумі з математичного аналізу розглянуто інтегральне числе-
ння, числові та функціональні ряди, диференціальне числення функцій
багатьох змінних.

Для студентів факультету прикладної математики та інформатики.

ББК В161 я73-4

Передмова

Цей навчальний посібник написано на підставі досвіду викладання курсу математичного аналізу на факультеті прикладної математики та інформатики Львівського національного університету ім'єні Івана Франка.

Метою посібника є сприяти активізації вправ з математики, надати цим вправам, у деякому розумінні, характеру семінарських занять.

Велику увагу звернено на задачі, які поглиблюють теоретичний матеріал. Це зумовило і зміст книги: поряд з типовими задачами обчислювального характеру поміщені приклади і вправи, які пояснюють теорію, сприяють глибшому її розумінню і розвивають навички точного математичного мислення студентів.

Структура книги така. На початку кожного параграфу подається стислий теоретичний вступ, який містить основні означення, формулювання важливих теорем і найголовніші формули. Потім наводиться повне розв'язування декількох характерних задач. Далі поміщено задачі без розв'язку, аналогічні розглянутим, які часто містять деякі особливості. Частина з них наділена вказівками.

Як було зазначено вище, в тексті посібника подано повні розв'язки деяких прикладів і задач. Це виправдано наступними міркуваннями: маючи навчальний посібник зі зразками розв'язаних задач, викладач має змогу затратати менше часу на розгляд стандартних задач обчислювального характеру, а значну частину своєї уваги зосередити на розв'язування задач принциповішого характеру. Отже, буде оптимальніше використовуватись час занять. Крім цього, треба враховувати, що посібник допоможе тим студентам, які займаються самостійно. Для оптимального засвоєння матеріалу перед тим як приступати до розв'язування задач, потрібно добре вивчити теоретичний матеріал, який відноситься до теми відповідного параграфу; потім розібрати наведені задачі з розв'язками і обов'язково закріпити знання розв'язуванням вправ, наведених для самостійної роботи.

Розділ 1

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Безпосереднє інтегрування за таблицею інтегралів

1. Властивості невизначеного інтеграла

- $(\int f(x)dx)' = f(x).$
- $\int f'(x)dx = f(x) + C.$
- $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$
- $\int af(x)dx = a \int f(x)dx.$
- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

2. Таблиця невизначених інтегралів

- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1.$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$
- $\int e^x dx = e^x + C.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
- $\int \cos x dx = \sin x + C.$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
- $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$
- $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$
- $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
- $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

Приклади розв'язування вправ

1. $\int \frac{\sqrt{x-17}\sqrt[3]{x^3-16}\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{1/6} - 17x^{5/12} - 16x^{1/15}) dx =$
 $= \frac{6}{7}x^{7/6} + \frac{1}{12}x^{17/12} - 15x^{16/15} + C.$
2. $\int \frac{2x^2-3}{(x^2+1)(x^2-4)} dx = \int \frac{x^2+1+x^2-4}{(x^2+1)(x^2-4)} dx = \int \frac{dx}{x^2-4} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$
 $= -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + \arctg x + C.$
3. $\int \frac{x^5-5}{x^2+2} dx = \int \frac{x^5+8-13}{x^2+2} dx = \int (x^3 - 2x^2 + 4 - \frac{13}{x^2+2}) dx =$
 $= \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 4x - \frac{13}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$
4. $\int (7x+12)^{2002} dx = \frac{1}{7} \frac{1}{2003} (7x+12)^{2003} + C = \frac{1}{14021} (7x+12)^{2003} + C.$
5. $\int \sqrt[13]{(13-13x)^{31}} dx = \int (13-13x)^{31/13} dx = -\frac{1}{13} \frac{13}{44} (13-13x)^{44/13} + C =$
 $= -\frac{1}{44} (13-13x)^{44/13} + C.$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-7}+\sqrt{x-13}} = \int \frac{\sqrt{x-7}-\sqrt{x-13}}{(x-7)-(x-13)} dx = \frac{1}{6} \int (\sqrt{x-7} - \sqrt{x-13}) dx =$
 $= \frac{1}{9} (\sqrt{(x-7)^3} - \sqrt{(x-13)^3}) + C.$
7. $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$
8. $\int \frac{3^{x-1}-5^{x+1}}{7^x} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{3}{7}\right)^x dx - 5 \int \left(\frac{5}{7}\right)^x dx = \frac{1}{3 \ln(3/7)} \left(\frac{3}{7}\right)^x - \frac{5}{\ln(5/7)} \left(\frac{5}{7}\right)^x + C.$
9. $\int 7^{3-x} e^{-5x} dx = \int e^{(3-x) \ln 7 - 5x} dx = \int e^{3 \ln 7 - (\ln 7 + 5)x} dx =$
 $= -\frac{1}{\ln 7 + 5} e^{3 \ln 7 - (\ln 7 + 5)x} + C = -\frac{1}{\ln 7 + 5} 7^{3-x} e^{-5x} + C.$

Вправи

Обчислити інтеграли:

- | | |
|---|---|
| 1.1. $\int (2x^3 - 5)^3 dx.$ | 1.2. $\int (2+x)^4 (x-1) dx.$ |
| 1.3. $\int (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) dx.$ | 1.4. $\int (2x^{15} + x^3)^3 dx.$ |
| 1.5. $\int \left(\frac{1-2x}{x}\right)^3 dx.$ | 1.6. $\int \frac{(2+x)^4}{x^5} dx.$ |
| 1.7. $\int \frac{x^2+5}{\sqrt{x}} dx.$ | 1.8. $\int \sqrt{x}(7-5\sqrt[3]{x}) dx.$ |
| 1.9. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[4]{x^3} + 3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[9]{x^5}} dx.$ | 1.10. $\int \left(x - \frac{1}{x}\right) \sqrt{\sqrt{x}} dx.$ |
| 1.11. $\int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx.$ | 1.12. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$ |

$$1.13. \int \frac{4-x}{\sqrt{x}-2} dx.$$

$$1.15. \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}}.$$

$$1.17. \int \frac{x^4+1}{x^2+1} dx.$$

$$1.19. \int x(1-x)^{50} dx.$$

$$1.21. \int \frac{1}{(x+1)^{100}} dx.$$

$$1.23. \int \frac{x^5}{x+1} dx.$$

$$1.25. \int x\sqrt{2-5x} dx.$$

$$1.27. \int \frac{(2-x)^2}{1-x^2} dx.$$

$$1.29. \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}.$$

$$1.31. \int \frac{x dx}{x^2+5x+6}.$$

$$1.33. \int (3^x+7^x)^2 dx.$$

$$1.35. \int \frac{e^{2x}-9}{e^x+3} dx.$$

$$1.37. \int \frac{2^{x+2}-3^{x-1}}{6^x} dx.$$

$$1.39. \int \sin^2 x dx.$$

$$1.41. \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$1.43. \int \operatorname{th}^2 x dx.$$

$$1.45. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$1.47. \int \frac{1+7\cos^2 x}{1-\cos 2x} dx.$$

$$1.49. \int \frac{dx}{1+\cos x}.$$

$$1.51. \int \frac{dx}{1+\sin x}.$$

$$1.14. \int \frac{\sqrt{x^2+7}-7}{x^2+7} dx.$$

$$1.16. \int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$1.18. \int \frac{x^3-2}{x+1} dx.$$

$$1.20. \int (x-7)(2x-1)^{35} dx.$$

$$1.22. \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx.$$

$$1.24. \int (x-1)\sqrt{x-2} dx.$$

$$1.26. \int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}} dx.$$

$$1.28. \int x^3\sqrt[3]{1+x} dx.$$

$$1.30. \int \frac{8-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}+4} dx.$$

$$1.32. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$$

$$1.34. \int (3^x-3^{-x})^3 dx.$$

$$1.36. \int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx.$$

$$1.38. \int 5^{x+3}e^{2x} dx.$$

$$1.40. \int \cos^2 x dx.$$

$$1.42. \int \operatorname{sh}^2 x dx.$$

$$1.44. \int \operatorname{cth}^2 x dx.$$

$$1.46. \int \frac{8\sin^2 x-3\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx.$$

$$1.48. \int \frac{1+7\operatorname{ch}^2 x}{1-\operatorname{ch}^2 x} dx.$$

$$1.50. \int \frac{dx}{1-\cos x}.$$

$$1.52. \int \frac{dx}{\cos^2(7x+\frac{\pi}{3})}.$$

1.2. Основні методи інтегрування

1. Метод введення нової змінної. Якщо $u = \varphi(x)$ — неперервно диференційовна функція, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) d\varphi(x) = \int f(u) du.$$

2. Метод підстановки. Якщо $f(x)$, $x = \varphi(t)$, $\varphi'(t)$ — неперервні функції, то

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

3. Метод інтегрування частинами. Якщо $u(x)$, $v(x)$ — диференційовні функції, то

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Приклади розв'язування вправ

$$\begin{aligned} 1. \int x(5x^2 - 7)^{100} dx &= \frac{1}{10} \int (5x^2 - 7)^{100} (5x^2 - 7)' dx = \\ &= \frac{1}{10} \int (5x^2 - 7)^{100} d(5x^2 - 7) = \frac{1}{10} \int u^{100} du = \\ &= \frac{1}{10} \frac{1}{101} u^{101} + C = \frac{1}{1010} (5x^2 - 7)^{101} + C. \end{aligned}$$

$$2. \int e^x \cos e^x dx = \int \cos e^x de^x = \int \cos u du = \sin u + C = \sin e^x + C.$$

$$3. \int x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} dx = \int e^{-\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x}\right)' dx = \int e^{-\frac{1}{x}} d\left(-\frac{1}{x}\right) = \int e^u du = e^u + C = e^{-\frac{1}{x}} + C.$$

$$4. \int \frac{\sqrt{\arctg x}}{1+x^2} dx = \int \sqrt{\arctg x} (\arctg x)' dx = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{\arctg^3 x} + C.$$

$$\begin{aligned} 5. \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx &= \int \cos^4 x \sqrt{\sin x} (\sin x)' dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \sqrt{\sin x} d\sin x = \\ &= \int (1 - u^2)^2 \sqrt{u} du = \int (u^{1/2} - 2u^{5/2} + u^{9/2}) du = \frac{2}{3} u^{3/2} - \frac{4}{7} u^{7/2} + \frac{2}{11} u^{11/2} + C = \\ &= \frac{2}{3} \sin^{3/2} x - \frac{4}{7} \sin^{7/2} x + \frac{2}{11} \sin^{11/2} x + C. \end{aligned}$$

$$6. \int \frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int 2 \arctg \sqrt{x} (\arctg \sqrt{x})' dx = \int 2u du = u^2 + C = \arctg^2 \sqrt{x} + C.$$

$$\begin{aligned} 7. \int \frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx &= [x = t^2, \sqrt{x} = t, dx = 2t dt] = \int \frac{\arctg t}{t(1+t^2)} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{\arctg t}{1+t^2} dt = \\ &= 2 \int \arctg t d(\arctg t) = \arctg^2 t + C = \arctg^2 \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \int (x^2 + \sqrt[3]{x}) \ln x dx &= \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}x^{4/3}\right) = \int u dv = uv - \int v du = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}x^{4/3}\right) \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}x^{4/3}\right) d\ln x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}x^{4/3}\right) \ln x - \end{aligned}$$

$$-\int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{3}{4}x^{1/3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{9} + \frac{3}{4}x^{4/3} \right) \ln x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{9}{16}x^{4/3} + C.$$

$$\begin{aligned} 9. \int x^3 \operatorname{arctg} x dx &= \frac{1}{4} \int \operatorname{arctg} x dx^4 = \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \int x^4 d \operatorname{arctg} x = \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} x - \\ & - \frac{1}{4} \int \frac{x^4 dx}{1+x^2} = \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2} dx = \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ & = \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. I &= \int e^x \sin x dx = - \int e^x d \cos x = -e^x \cos x + \int \cos x de^x = \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + \int e^x d \sin x = \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x de^x = e^x (\sin x - \cos x) - I. \\ \text{Звідси } I &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C. \end{aligned}$$

Вправи

Обчислити інтеграли:

$$1.53. \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx.$$

$$1.55. \int \frac{x dx}{4+x^4}.$$

$$1.57. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-5}}.$$

$$1.59. \int \frac{2x^3-x}{x^4-x^2} dx.$$

$$1.61. \int \frac{\cos \ln x}{x} dx.$$

$$1.63. \int \frac{y dy}{\sin^2 y^2}.$$

$$1.65. \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

$$1.67. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$1.69. \int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{2/3}}.$$

$$1.71. \int x^3 e^{-x^4} dx.$$

$$1.73. \int \sin^3 x \cos x dx.$$

$$1.54. \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}.$$

$$1.56. \int \frac{x^3 dx}{x^8-2}.$$

$$1.58. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4-5}}.$$

$$1.60. \int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1+e^{6x}}}.$$

$$1.62. \int 2^{x^5-37} x^4 dx.$$

$$1.64. \int \frac{2002\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1.66. \int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}.$$

$$1.68. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$1.70. \int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}.$$

$$1.72. \int \frac{dx}{e^{2x} + e^{-2x}}.$$

$$1.74. \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx.$$

- 1.75. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx.$
- 1.76. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx.$
- 1.77. $\int \frac{dx}{\cos x}.$
- 1.78. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}.$
- 1.79. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x - 2 \cos^2 x}} dx.$
- 1.80. $\int x \operatorname{tg}(x^2 - 5) dx.$
- 1.81. $\int \frac{x^2 e^{\sqrt{x^3+1}}}{\sqrt{x^3+1}} dx.$
- 1.82. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \sqrt{1-x^2}}.$
- 1.83. $\int x^3(1-5x^2)^{10} dx.$
- 1.84. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}.$
- 1.85. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
- 1.86. $\int x^5(2-5x^3)^{2/3} dx.$
- 1.87. $\int \frac{dx}{e^{x/2} + e^x}.$
- 1.88. $\int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}.$
- 1.89. $\int x e^{-x} dx.$
- 1.90. $\int x \cos x dx.$
- 1.91. $\int x^2 \sin 2x dx.$
- 1.92. $\int x^2 \ln x dx.$
- 1.93. $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx.$
- 1.94. $\int \arcsin x dx.$
- 1.95. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$
- 1.96. $\int x^2 \arccos x dx.$
- 1.97. $\int x^{-2} \arcsin x dx.$
- 1.98. $\int \ln(x^2 + 1) dx.$
- 1.99. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$
- 1.100. $\int e^{2x} \cos 3x dx.$
- 1.101. $\int e^{\sqrt{x}} dx.$
- 1.102. $\int x \sin^2 x dx.$
- 1.103. $\int x^5 e^{x^3} dx.$
- 1.104. $\int \arcsin^2 x dx.$
- 1.105. $\int x \operatorname{arctg}^2 x dx.$
- 1.106. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$
- 1.107. $\int e^{2x} \sin^2 x dx.$
- 1.108. $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx.$
- 1.109. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$
- 1.110. $\int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx.$

1.3. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен

1. Табличні інтеграли:

$$1. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$$

$$5. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$6. \int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C.$$

Інтеграли вигляду $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a)^n}$ обчислюються за наступною рекурентною формулою:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na} \left(\frac{x}{(x^2+a)^n} + (2n-1)I_n \right). \quad (*)$$

Дійсно, інтегруючи за частинами, отримуємо

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2+a)^n} - \int x d \frac{1}{(x^2+a)^n} = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2n \int \frac{x^2+a-a}{(x^2+a)^{n+1}} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2+a)^n} + 2nI_n - 2naI_{n+1}, \end{aligned}$$

звідки й випливає наведена формула.

Приклади розв'язування вправ

$$1. \int \frac{dx}{x^2+2x+7} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+6} = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{6}} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2+2x-7} = \int \frac{dx}{(x+1)^2-8} = \frac{1}{2\sqrt{8}} \ln \left| \frac{x+1-\sqrt{8}}{x+1+\sqrt{8}} \right| + C.$$

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{x dx}{x^2+2x+7} &= \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2+6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x+1)^2}{(x+1)^2+6} - \int \frac{dx}{(x+1)^2+6} = \frac{1}{2} \ln |(x+1)^2+6| - \\ &- \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+7) - \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{6}} + C. \end{aligned}$$

4. $\int \frac{x^3 dx}{x^4 - 2x^2 - 3} = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx^2}{x^4 - 2x^2 - 3} = \frac{1}{2} \int \frac{u du}{u^2 - 2u - 3} = \frac{1}{2} \int \frac{u-1+1}{(u-1)^2 - 4} du =$
 $= \frac{1}{4} \int \frac{d(u-1)}{(u-1)^2 - 4} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u-1)^2 - 4} = \frac{1}{4} \ln |(u-1)^2 - 4| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1-2}{u-1+2} \right| + C =$
 $= \frac{1}{4} \ln |x^4 - 2x^2 - 3| + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^2-3}{x^2+1} \right| + C.$
5. $\int \sqrt{17 - 4x^2 - 4x} dx = \int \sqrt{18 - (2x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2x+1}{2} \sqrt{18 - (2x+1)^2} + \right.$
 $\left. + \frac{18}{2} \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{18}} \right) + C = \frac{2x+1}{4} \sqrt{17 - 4x^2 - 4x} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{2x+1}{3\sqrt{2}} + C.$
6. $\int \frac{2x^2+7x-3}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx = \int \frac{2(x^2+4x+5)-x-13}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx = 2 \int \sqrt{x^2+4x+5} dx -$
 $- \int \frac{x+2+11}{\sqrt{(x+2)^2+1}} dx = 2 \int \sqrt{(x+2)^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(x+2)^2}{\sqrt{(x+2)^2+1}} - 11 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} =$
 $= 2 \left(\frac{x+2}{2} \sqrt{(x+2)^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| x+2 + \sqrt{(x+2)^2+1} \right| \right) -$
 $- \sqrt{(x+2)^2+1} - 11 \ln \left| x+2 + \sqrt{(x+2)^2+1} \right| + C =$
 $= (x+1) \sqrt{x^2+4x+5} - 10 \ln \left| x+2 + \sqrt{x^2+4x+5} \right| + C.$
7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+1}} = \left[x = \frac{1}{t}, dx = -\frac{dt}{t^2} \right] = - \int \frac{dt}{\sqrt{1+4t+t^2}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{(t+2)^2-3}} =$
 $= - \ln |t+2 + \sqrt{(t+2)^2-3}| + C = - \ln \left| \frac{1}{x} + 2 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right| + C.$
8. $\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^3} = \int \frac{d(x+2)}{((x+2)^2+1)^3} = \int \frac{du}{(u^2+1)^3} = [\text{див. } (*)] =$
 $= \frac{1}{4} \left(\frac{u}{(u^2+1)^2} + 3 \int \frac{du}{(u^2+1)^2} \right) = \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{u}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1} \right) =$
 $= \frac{u}{4(u^2+1)^2} + \frac{3u}{8(u^2+1)} + \frac{3}{8} \arctg u + C =$
 $= \frac{x+2}{4(x^2+4x+5)^2} + \frac{3(x+2)}{8(x^2+4x+5)} + \frac{3}{8} \arctg(x+2) + C.$
9. $\int \frac{\cos x dx}{\sin 2x - \sin x} = \int \frac{d \sin x}{1 - 2 \sin^2 x - \sin x} = - \int \frac{du}{2u^2+u-1} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2+\frac{u}{2}-12} =$
 $= -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\left(u+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \ln \left| \frac{u+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{u+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} \right| + C = -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{\sin x + 1} \right| + C.$

Вправи

Обчислити інтеграли:

1.111. $\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}.$

1.112. $\int \frac{dx}{x^2 - x - 2}.$

$$1.113. \int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}.$$

$$1.115. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 5}}.$$

$$1.117. \int \frac{dx}{\sqrt{8 + 3x - x^2}}.$$

$$1.119. \int \sqrt{x^2 + x + 3} dx.$$

$$1.121. \int \frac{x dx}{x^4 - 2x^2 - 1}.$$

$$1.123. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}}.$$

$$1.125. \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - 3x^2 - 2x^4}}.$$

$$1.127. \int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2}.$$

$$1.129. \int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx.$$

$$1.131. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}}.$$

$$1.133. \int \frac{6x + 1}{\sqrt{x - x^2}} dx.$$

$$1.135. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin x + \cos^2 x}}.$$

$$1.137. \int \frac{dx}{3 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}.$$

$$1.139. \int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 3}.$$

$$1.141. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$1.143. \int \frac{dx}{(x + 1) \sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$1.145. \int \frac{dx}{(x + 2)^2 \sqrt{x^2 + 2x - 5}}.$$

$$1.147. \int x \sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} dx.$$

$$1.114. \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5}.$$

$$1.116. \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 3x + 4}}.$$

$$1.118. \int \sqrt{8 + 3x - x^2} dx.$$

$$1.120. \int \sqrt{x^2 + 2x - 7} dx.$$

$$1.122. \int \frac{x dx}{2x^2 - x^4 - 3}.$$

$$1.124. \int x \sqrt{2x^2 - x^4 - 3} dx.$$

$$1.126. \int \frac{x^3 dx}{x^4 - x^2 + 2}.$$

$$1.128. \int \frac{x dx}{\sqrt{5 + x - x^2}}.$$

$$1.130. \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - 3x^2 - 2x^4}}.$$

$$1.132. \int \frac{x + x^3}{\sqrt{1 + x^2 - x^4}} dx.$$

$$1.134. \int \frac{2x - 1}{x^2 - 2x + 5} dx.$$

$$1.136. \int \frac{dx}{e^x - 2 + 6e^{-x}}.$$

$$1.138. \int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x}.$$

$$1.140. \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{-x} + e^{-2x}}}.$$

$$1.142. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + x - 1}}.$$

$$1.144. \int \frac{dx}{(x - 1) \sqrt{x^2 - 2}}.$$

$$1.146. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$1.148. \int x \sqrt{x^2 + 2x - 1} dx.$$

1.149. $\int x^3 \sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} dx.$

1.150. $\int \frac{1 - x + x^2}{x \sqrt{1 + x - x^2}} dx.$

1.151. $\int \frac{x^2 + 1}{x \sqrt{1 + x^4}} dx.$

1.152. $\int \frac{dx}{(x^2 - 3x + 3)^2}.$

1.153. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x)^2}.$

1.154. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^3}.$

1.155. $\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}.$

1.156. $\int \frac{x dx}{(2x^2 + 3x + 5)^2}.$

1.4. Інтегрування раціональних функцій

Інтегрування раціональних функцій. Якщо знаменник $Q(x)$ правильного раціонального дробу $P(x)/Q(x)$ може бути зображений наступним чином:

$$Q(x) = (x - a)^k (x - b)^l \cdots (x^2 + \alpha x + \beta)^r (x^2 + \gamma x + \mu)^s \cdots,$$

причому всі двочлени та тричлени різні й, крім того, тричлени не мають дійсних коренів, то

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + \alpha x + \beta} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + \alpha x + \beta)^2} + \cdots + \frac{M_r x + N_r}{(x^2 + \alpha x + \beta)^r} + \frac{R_1 x + L_1}{x^2 + \gamma x + \mu} + \frac{R_2 x + L_2}{(x^2 + \gamma x + \mu)^2} + \cdots + \frac{R_s x + L_s}{(x^2 + \gamma x + \mu)^s} + \cdots,$$

де $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, R_1, L_1, R_2, L_2, \dots$ — деякі дійсні сталі, які потрібно визначити. Для їх визначення прирівнюються коефіцієнти при однакових степенях змінної x , що приводить до системи лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів. (Цей метод називають *методом невизначених коефіцієнтів*). Можна також отримати систему рівнянь для коефіцієнтів, підставляючи в обидві частини тотожності відповідно підібрані числові значення x (Цей метод називають *метод часткових значень*).

У випадку, коли раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *неправильний*, потрібно спочатку виділити цілу частину.

Приклади розв'язування вправ

1. $I = \int \frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-3)(x+4)(x-1)} dx.$

Оскільки підінтегральна функція — правильний раціональний дріб, то маємо

$$\frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-3)(x+4)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4} + \frac{D}{x-1}.$$

Привівши праву частину до спільного знаменника і відкинувши його, отримуємо тотожність

$$15x^2 - 4x - 81 = A(x+4)(x-1) + B(x-3)(x-1) + D(x-3)(x+4). (*)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної x , отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A + B + D = 15 \\ 3A - 4B + D = -4 \\ -4A + 3B - 12D = -81 \end{cases} \quad \begin{cases} -10D = -70 \\ A + B = 8 \\ 3A - 4B = -11 \end{cases} \quad \begin{cases} D = 7 \\ A = 3 \\ B = 5 \end{cases}$$

Отже,

$$I = 3 \int \frac{dx}{x-3} + 5 \int \frac{dx}{x+4} + 7 \int \frac{dx}{x-1} = 3 \ln|x-3| + 5 \ln|x+4| + 7 \ln|x-1| + C = \ln|(x-3)^3(x+4)^5(x-1)^7| + C.$$

Зауваження. Покажемо на цьому прикладі застосування методу часткових значень. Підставляючи у тотожність (*) три будь-які часткові значення, отримаємо три рівняння для визначення трьох невизначених коефіцієнтів. Найзручніше у якості x вибирати корені знаменника. Покладаючи в тотожність (*) $x = 3$, отримуємо $A = 3$; покладаючи $x = -4$, отримуємо $B = 5$; покладаючи $x = 1$, отримуємо $D = 7$.

$$2. I = \int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \int \left(x + 1 - \frac{x+2}{x(x^2-x-2)} \right) dx = \\ = \frac{x^2}{2} + x - A \ln|x| - B \ln|x-2| - D \ln|x+1| + C.$$

коефіцієнти A, B, D знаходимо з наступної тотожності

$$x + 2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Dx(x-2).$$

Очевидно, що $A = -1, B = 2/3, D = 1/3$. Отже,

$$I = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \frac{2}{3} \ln|x-2| - \frac{1}{3} \ln|x+1| + C.$$

$$3. I = \int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x(x-1)^2} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1} \right) dx.$$

Звідси отримуємо тотожність

$$2x^2 - 3x + 3 = A(x-1)^2 + Bx + Dx(x-1) = (A+D)x^2 + (B-2A+D)x + A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, отримуємо $A = 3, D = -1;$

$B = 2$. Отже,

$$I = 3 \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{x-1} = 3 \ln|x| - \frac{2}{x-1} - \ln|x-1| + C.$$

$$4. I = \int \frac{x dx}{x^3 + 1} = \int \frac{x dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+D}{x^2-x+1} \right) dx.$$

Звідси

$x \equiv A(x^2 - x + 1) + (Bx + D)(x + 1) = (A + B)x^2 + (B - A + D)x + (A + D)$,
ми отримуємо $A + B = 0$, $B - A + D = 1$, $A + D = 0$. Отже, $A = -\frac{1}{3}$;
 $B = \frac{1}{3}$; $D = \frac{1}{3}$, а

$$I = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} I_1.$$

$$I_1 = \int \frac{(x-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx = \int \frac{(x-\frac{1}{2}) dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \ln \left((x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \right) +$$

$$+ \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{(x-\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Таким чином,

$$I = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$5. I = \int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} dx.$$

Оскільки $\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+3} + \frac{F}{x+1}$, то $A = 1$; $B = -1$;
 $D = 0$; $E = 0$; $F = 1$. Отже,

$$I = \int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{x+1} = I_1 + \ln|x+1|.$$

Враховуючи, що $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$, то після заміни $x+1 = t$,
отримуємо

$$I_1 = \int \frac{(t-2)dt}{(t^2+2)^2} = \int \frac{t dt}{(t^2+2)^2} - 2 \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2(t^2+2)} - 2I_2.$$

Інтеграл I_2 обчислюємо за рекурентною формулою (*) з пункту 3:

$$I_2 = \frac{1}{4} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{4} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C.$$

Повертаючись до змінної x , отримуємо

$$I_1 = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Отже,

$$I = \ln|x+1| - \frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Вправи

Обчислити інтеграли:

$$1.157. \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+3)} dx.$$

$$1.158. \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

$$1.159. \int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)}.$$

$$1.160. \int \frac{x dx}{2x^2-3x-2}.$$

$$1.161. \int \frac{x dx}{x^2-5x+6}.$$

$$1.162. \int \frac{dx}{x^4-x^2}.$$

$$1.163. \int \frac{x^{10} dx}{x^2+x-2}.$$

$$1.164. \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx.$$

$$1.165. \int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

$$1.167. \int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx.$$

$$1.169. \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$$

$$1.171. \int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

$$1.173. \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}.$$

$$1.175. \int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}.$$

$$1.177. \int \frac{x dx}{x^3 - 1}.$$

$$1.179. \int \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

$$1.181. \int \frac{dx}{x^6 + 1}.$$

$$1.183. \int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}.$$

$$1.166. \int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2}.$$

$$1.168. \int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx.$$

$$1.170. \int \frac{dx}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}.$$

$$1.172. \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$$

$$1.174. \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$$

$$1.176. \int \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

$$1.178. \int \frac{dx}{x^4 - 1}.$$

$$1.180. \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}.$$

$$1.182. \int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$$

$$1.184. \int \frac{x^2 dx}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1}.$$

1.5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Деякі типи інтегралів від алгебраїчних ірраціональностей потрібною заміною змінних можуть бути зведені до інтегралів від раціональних функцій. Таке перетворення інтегралу прийнято називати раціоналізацією.

А. Якщо під знаком інтегралу стоїть раціональна функція від дробових степенів незалежної змінної x , тобто функція $R(x, x^{p_1/q_1}, \dots, x^{p_k/q_k})$, то раціоналізація інтегралу здійснюється за допомогою підстановки $x = t^m$, де $m = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$.

В. Якщо під знаком інтегралу стоїть раціональна функція від x і дробових степенів дробово-лінійної функції вигляду $\frac{ax+b}{cx+d}$, то раціоналізація інтегралу здійснюється за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$, де m має такий самий зміст, що й вище.

С. Інтеграли від диференціального біному $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, де m , n і p — раціональні числа, можуть бути зведені до інтегрування раціональних функцій лише у наступних трьох випадках (теорема Чебишева):

Випадок 1. Нехай p — ціле. Покладемо $x = z^N$, де N — спільний знаменник дробів m і n .

Випадок 2. Нехай $\frac{m+1}{n}$ — ціле. Покладемо $a+bx^n = z^N$, де N — знаменник дробу p .

Випадок 3. Нехай $\frac{m+1}{n} + p$ — ціле. Покладемо $ax^{-n} + b = z^N$, де N — знаменник дробу p .

Якщо $n = 1$, то ці випадки еквівалентні наступним:

1) p — ціле; 2) m — ціле; 3) $m + p$ — ціле.

Д. Інтеграли вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ зводяться до інтегрування раціональних функцій за допомогою трьох підстановок Ейлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$, якщо $a > 0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$, якщо $c > 0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$, де α — один з дійсних коренів.

Приклади розв'язування вправ

$$1. \int \frac{x + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx = \left[\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 \end{array} \right] = 6 \int \frac{(t^6+t^4+t)t^5}{t^6(1+t^2)} dt =$$

$$= 6 \int \frac{t^5+t^3+1}{t^2+1} dt = 6 \int (t^3 + \frac{1}{t^2+1}) dt = \frac{3}{2}t^4 + 6 \operatorname{arctg} t + C = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6 \operatorname{arctg} t + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} dx = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x+2}{x-1} = t^4, \quad x = \frac{t^4+2}{t^4-1}, \\ dx = \frac{-12t^3}{(t^4-1)^2} \end{array} \right] =$$

$$= -12 \int \frac{(t^4-1)^2 t^3 dt}{3 \cdot 3 \cdot t^4 \cdot (t^4-1)^2} = -\frac{4}{3} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3t} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C.$$

$$3. I = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-2/3}(1+x^{1/2}) dx.$$

Оскільки $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{2}$ і $\frac{m+1}{n} = 1 \in \mathbb{Z}$, то за випадком 2 інтегрування диференціального біному застосуємо підстановку $1+x^{1/3} = t^2$.

Звідки $\frac{1}{3}x^{-2/3}dx = 2tdt$ і отримуємо

$$I = 6 \int t^2 dt = 2t^3 + C = 2(1+x^{1/3})^{3/2} + C = 2(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{1+\sqrt[3]{x}} + C.$$

$$4. I = \int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} = \int x^{-11}(1+x^4)^{-1/2} dx.$$

Тут $m = -11$, $n = 4$, $p = -1/2$ і $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -3 \in \mathbb{Z}$. Тому за випадком 3 інтегрування диференціального біному покладемо $x^{-4} + 1 = t^2$. Звідси $x = (t^2 - 1)^{-1/4}$, $dx = \frac{tdt}{2(t^2 - 1)^{5/4}}$ і одержуємо

$$I = -\frac{1}{2} \int (t^2 - 1)^{11/4} \cdot \left(\frac{t^2}{t^2 - 1} \right)^{-1/2} \frac{tdt}{(t^2 - 1)^{5/4}} = -\frac{1}{2} \int (t^2 - 1) dt = -\frac{t^3}{10} + \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + C = \\ = -\frac{1}{10} \sqrt{(1 + x^4)^5} + \frac{1}{3x^3} \sqrt{(1 + x^4)^3} - \frac{1}{2x^2} \sqrt{1 + x^4} + C.$$

$$5. I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Оскільки $a = 1 > 0$, то можна застосувати першу підстановку Ейлера $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - x$. Звідси $2x + 2t = t^2 - 2$, $x = \frac{t^2 - 2}{2(1+t)}$,

$$1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 1 + t - \frac{t^2 - 2}{2(1+t)} = \frac{t^2 + 4t + 4}{2(1+t)},$$

$x = \frac{t^2 - 2}{2(1+t)} dt$ і ми отримуємо

$$I = \int \frac{2(1+t)(t^2 + 2t + 2)}{(t^2 + 4t + 4)2(1+t)^2} dt = \int \frac{(t^2 + 2t + 2)}{(t+1)(t+2)^2} dt = \int \left(\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} + \frac{D}{(t+2)^2} \right) dt.$$

Методом невизначених коефіцієнтів знаходимо $A = 1$, $B = 0$, $D = -2$.

Таким чином,

$$I = \ln|t + 1| + \frac{2}{t+2} + C = \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + \frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}} + C.$$

$$6. I = \int \frac{x dx}{\sqrt{(7x - 10 - x^2)^3}}.$$

Оскільки $a = -1 < 0$, $c = -10 < 0$, то застосуємо третю підстановку Ейлера $\sqrt{7x - 10 - x^2} = \sqrt{(x-2)(5-x)} = (x-2) \cdot t$. Звідси

$$(5-x) = (x-2)t^2, \quad x = \frac{5+2t^2}{1+t^2}, \quad dx = -\frac{6t dt}{(1+t^2)^2},$$

$$(x-2)t = \left(\frac{5+2t^2}{1+t^2} - 2 \right) t = \frac{3t}{1+t^2}.$$

Отже,

$$I = -\frac{6}{27} \int \frac{5+2t^2}{t^2} dt = -\int \left(\frac{5}{t^3} + 2 \right) dt = \frac{10}{9t} - \frac{4}{9}t + C = \frac{10(x-2)}{9\sqrt{7x-10-x^2}} - \frac{4\sqrt{7x-10-x^2}}{9(x-2)} + C.$$

Вправи

1. Обчислити інтеграли:

$$1.185. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$1.187. \int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx.$$

$$1.189. \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^3 \sqrt{x}}.$$

$$1.186. \int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}.$$

$$1.188. \int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx.$$

$$1.190. \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx.$$

$$1.191. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$$

$$1.192. \int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} \quad (a > 0).$$

II. Обчислити інтеграли:

$$1.193. \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

$$1.194. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x+x^2}}.$$

$$1.195. \int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1.196. \int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx.$$

$$1.197. \int \frac{x dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}.$$

$$1.198. \int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}.$$

III. Обчислити інтеграли:

$$1.199. \int \sqrt{x^3+x^4} dx.$$

$$1.200. \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx.$$

$$1.201. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-\sqrt{x^2}}}.$$

$$1.202. \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1.203. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

$$1.204. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}.$$

$$1.205. \int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^6}}.$$

$$1.206. \int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}.$$

$$1.207. \int \sqrt[3]{3x-x^3}.$$

$$1.208. \int \frac{x dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

$$1.209. \int \frac{x dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}.$$

$$1.210. \int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx.$$

$$1.211. \int \frac{x^3}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$$

$$1.212. \int \frac{x dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}.$$

$$1.213. \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1.214. \int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}.$$

$$1.215. \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x^2-1}}.$$

$$1.216. \int \frac{\sqrt{x^2+2}}{1+x^2} dx.$$

$$1.217. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x^2-1}}.$$

$$1.218. \int \frac{x dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1.219. \int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}.$$

$$1.220. \int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} dx.$$

1.6. Інтегрування тригонометричних функцій

А. Інтеграли вигляду $R(\sin x, \cos x) dx$, де R — раціональна функція, в загальному випадку зводяться до інтегрування раціональних функцій за допомогою підстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ ($\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$).

1) Якщо виконується рівність

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x) \text{ або } R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

то корисно використовувати підстановку $\cos x = t$ або відповідно $\sin x = t$.

2) Якщо виконується рівність

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x),$$

то корисно використовувати підстановку $\operatorname{tg} x = t$.

В. Інтеграли вигляду $I = \int \sin^m x \cos^n x dx$, де $m, n \in \mathbb{Q}$, зводяться до інтегралу від диференціального біному

$$I = \int t^m (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt, \quad t = \sin x,$$

і тому інтегруються в елементарних функціях тільки у трьох випадках:

- 1) n — непарне число ($\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$);
- 2) m — непарне число ($\frac{m+1}{2} \in \mathbb{Z}$);
- 3) $m + n$ — парне число ($(\frac{m+1}{2} + \frac{n-1}{2}) \in \mathbb{Z}$).

Приклади розв'язування вправ

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos^2 x}} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] = -\int (1 - t^2) t^{-\frac{1}{2}} dt = -3t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{7} t^{\frac{7}{2}} + C = \\ &= 3\sqrt{\cos x} \left(\frac{1}{7} \cos^2 x - 1 \right) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right] = \int t^2 (1 + t^2) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \\ &= \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{dx}{\sin x (2 + \cos x - 2 \sin x)} &= \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{\frac{2 dt}{1+t^2} (2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2})} = \int \frac{(1+t^2) dt}{t(t^2 - 4t + 3)} = \\ &= \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{D}{t-1} \right) dt = A \ln |t| + B \ln |t-3| + D \ln |t-1| + C = \\ &= A \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + B \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3| + D \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1| + C, \end{aligned}$$

де $A = 1/3$, $B = 5/3$, $D = -1$ знаходимо методом невизначених коефі-

цієнтів з тотожності

$$1 + t^2 \equiv A(t - 3)(t - 1) + Bt(t - 1) + Dt(t - 3).$$

$$4. I = \int \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x} dx.$$

Тут можна застосувати підстановку $t = \operatorname{tg} x$, але простіше перетворити підінтегральну функцію так

$$I = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^4 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^4 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx + 2 \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Вправи

I. Обчислити інтеграли:

$$1.221. \int \cos^5 x \, dx.$$

$$1.222. \int \sin^6 x \, dx.$$

$$1.223. \int \cos^6 x \, dx.$$

$$1.224. \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$$

$$1.225. \int \sin^4 x \cos^5 x \, dx.$$

$$1.226. \int \sin^5 x \cos^5 x \, dx.$$

$$1.227. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$$

$$1.228. \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$$

$$1.229. \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

$$1.230. \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

$$1.231. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$$

$$1.232. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$$

$$1.233. \int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}.$$

$$1.234. \int \operatorname{tg}^5 x \, dx.$$

$$1.235. \int \operatorname{ctg}^6 x \, dx.$$

$$1.236. \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx.$$

$$1.237. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}.$$

$$1.238. \int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

$$1.239. \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$$

$$1.240. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}.$$

$$1.241. I_n = \int \sin^n x \, dx \quad (n > 2).$$

$$1.242. K_n = \int \cos^n x \, dx \quad (n > 2).$$

$$1.243. I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x} \quad (n > 2).$$

$$1.244. K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} \quad (n > 2).$$

II. Обчислити інтеграли:

$$1.245. \int \sin 5x \cos x \, dx.$$

$$1.246. \int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx.$$

$$1.247. \int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} \, dx.$$

$$1.248. \int \sin x \sin(x + a) \sin(x + b) \, dx.$$

1.249. $\int \cos^2 ax \cos^2 bx \cos 3x \, dx.$

1.250. $\int \sin^3 2x \cos^2 3x \cos 3x \, dx.$

1.251. $\int \frac{dx}{\sin(x+a) \sin(x+b)}.$

1.252. $\int \frac{dx}{\sin(x+a) \cos(x+b)}.$

1.253. $\int \frac{dx}{\cos(x+a) \cos(x+b)}.$

1.254. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}.$

1.255. $\int \frac{dx}{\cos x - \cos a}.$

1.256. $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a) \, dx.$

III. Обчислити інтеграли:

1.257. $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}.$

1.258. $\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}.$

1.259. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$

1.260. $\int \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x};$ а) $0 < \varepsilon < 1$; б) $\varepsilon > 1$.

1.261. $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx.$

1.262. $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$

1.263. $\int \frac{\cos^2 x \, dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2}.$

1.264. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$

1.265. $\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2}.$

1.266. $\int \frac{\sin x \, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}.$

1.267. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$

1.268. $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} dx.$

1.269. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$

1.270. $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos^4 x} dx.$

1.271. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$

1.272. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2 \cos^2 x)^2}.$

Розділ 2

Визначений інтеграл

2.1. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца

1. *Інтеграл Рімана.* Якщо функція $f(x)$ визначена на $[a, b]$ і $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, то інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ називається число

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

де $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ і $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

2. *Формула Ньютона-Лейбніца.* Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$ і $F(x)$ — її первісна, тобто $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

3. *Формула інтегрування частинами.* Якщо $f(x), g(x) \in C^1[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) f'(x) dx.$$

4. *Заміна змінної.* Якщо:

- 1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$;
- 2) функція $\varphi(x)$ неперервна разом зі своєю похідною на відрізку $[\alpha, \beta]$, де $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$;
- 3) композиція функцій $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Приклади розв'язування вправ

1. Обчислити, виходячи з означення, інтеграл $\int_0^1 x dx$.

Розв'язування. Розіб'ємо відрізок $[0, 1]$ на n рівних частин точками поділу $x_i = i/n$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Тоді $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = 1/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. За точки $\xi_i = x_{i+1} = (i+1)/n$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Складемо інтегральну суму

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$, а функція $f(x) = x$ є інтегрована на $[0, 1]$, то отримуємо

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

2. Нехай $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$ Обчислити $\int_0^2 f(x) dx$.

Розв'язування. За властивістю адитивності інтегралу

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{x} dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left. \frac{2}{3} x^{3/2} \right|_1^2 = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(4\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

3. Знайти помилку допущену при наступному обчисленні інтегралу

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x + 3\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} dx}{1+3\tg^2 x} = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tg x)}{\frac{1}{3} + \tg^2 x} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \tg x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0. \end{aligned}$$

(Інтеграл від всюди додатної функції вийшов рівним нулю!)

Розв'язування. Застосування формули Ньютона-Лейбніца незаконне, оскільки первісна $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \tg x)$ має розрив в точці $x = \pi/2$. Дійсно,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \tg x) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \tg x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Правильний результат можна отримати так

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \tg x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \tg x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

4. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$.

Розв'язування. Маємо $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2}|\sin x|$ і, враховуючи, що $|\sin x|$ має період π , отримуємо

$$\int_0^{100\pi} |\sin x| dx = 100\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = 200\sqrt{2}.$$

5. Обчислити границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right)$.

Розв'язування. Перетворимо суму у круглих дужках так

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{2}{n})^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{n}{n})^2}} \right).$$

Отримана сума є інтегральною сумою для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ на відрізьку $[0; 1]$, поділеному на n рівних частин. Оскільки функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ неперервна на $[0; 1]$ (а, значить, інтегрована на $[0; 1]$), то границя такої інтегральної суми при $n \rightarrow +\infty$ дорівнює інтегралу $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$.

6. Обчислити інтеграл $I = \int_1^e \ln^3 x dx$.

Розв'язування. Покладемо $u = \ln^3 x$, $dv = dx$. Тоді $du = 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} dx$, $v = x$. Оскільки функції u та v неперервні разом зі своїми похідними на відрізьку $[1; e]$, то за формулою інтегрування частинами отримаємо

$$I = \ln^3 x \cdot x \Big|_1^e - 3 \int_1^e x \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = (e - 0) - 3 \int_1^e \ln^2 x dx.$$

Останній інтеграл обчислюємо знову частинами. Маємо

$$\begin{aligned} I &= e - 3 \left(\ln^2 x \cdot x \Big|_1^e - 2 \int_1^e x \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = e - 3 \left(\ln^2 x \cdot x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx \right) = \\ &= -2e + 6 \left(\ln x \cdot x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = -2e + 6(e - x \Big|_1^e) = 4e - 6(e - 1) = 6 - 2e. \end{aligned}$$

7. Обчислити інтеграл $I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx$.

Розв'язування. Зробимо підстановку $x = 2 \sin t$, $-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$. Функція $x = \varphi(t) = 2 \sin t$ на відрізьку $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$ задовольняє усім умовам теореми про заміну змінної в означеному інтегралі, оскільки вона неперервно диференційована, монотонна і $\varphi(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$; $\varphi(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$. Отже, $x = 2 \sin t$; $dx = 2 \cos t dt$; $\sqrt{4 - x^2} = 2|\cos t| = 2 \cos t$,

$$I = 4 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t \, dt = 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) \, dt = 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

Вправи

I. Обчислити визначені інтеграли, розглядаючи їх як графіці інтегральних сум:

$$2.1. \int_{-1}^2 x^2 \, dx.$$

$$2.2. \int_0^1 a^x \, dx \quad (a > 0).$$

$$2.3. \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

$$2.4. \int_0^x \cos t \, dt.$$

$$2.5. \int_a^b \frac{dx}{x^2} \quad (0 < a < b).$$

II. Обчислити інтеграли використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца:

$$2.6. \int_{-1}^3 \sqrt[3]{x} \, dx.$$

$$2.7. \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$2.8. \int_0^{\pi} \sin x \, dx.$$

$$2.9. \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2.10. \int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$2.11. \int_0^2 |1-x| \, dx.$$

$$2.12. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi)$$

$$2.13. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

$$2.14. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} \quad (|a| < 1, |b| < 1, ab > 0).$$

$$2.15. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (ab \neq 0).$$

III. Пояснити, чому формальне застосування формули Ньютона-Лейбніца дає хибні результати, якщо:

$$2.16. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x};$$

$$2.17. \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$2.18. \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

IV. За допомогою визначених інтегралів знайти границі наступних сум:

$$2.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$2.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$$

$$2.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right).$$

$$2.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

$$2.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}.$$

$$2.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

V. Знайти:

$$2.25. \frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx, \quad 2.26. \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx, \quad 2.27. \frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx.$$

VI. Знайти:

$$2.28. \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt, \quad 2.29. \frac{d}{dx} \int_{x^2}^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}, \quad 2.30. \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

VII. Знайти:

$$2.31. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}, \quad 2.32. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} x)^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad 2.33. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{x^2} dx \right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} dx}.$$

VIII. Використовуючи формулу інтегрування частинами, знайти:

$$2.34. \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx, \quad 2.35. \int_0^{\pi} x \sin x dx, \quad 2.36. \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx, \\ 2.37. \int_{1/e}^e |\ln x| dx, \quad 2.38. \int_0^1 \arccos x dx, \quad 2.39. \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx.$$

IX. Використовуючи формулу заміни змінних, знайти:

$$2.40. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}, \quad 2.41. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad 2.42. \int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}, \\ 2.43. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx, \quad 2.44. \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

2.2. Обчислення інтегралів. Теорема про середнє

1. Середнє значення функції. Число $M[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ називається середнім значенням функції на проміжку $[a, b]$.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то знайдеться точка $c \in (a, b)$ така, що $M[f] = f(c)$.

2. Перша теорема про середнє. Якщо: 1) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ обмежені та відповідно, інтегровані на відрізку $[a, b]$; 2) функція $\varphi(x)$ не змінює знаку при $a < x < b$, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \eta \int_a^b \varphi(x) dx,$$

де $m \leq \eta \leq M$ і $m = \inf f(x) : x \in [a, b]$, $M = \sup f(x) : x \in [a, b]$; 3) якщо, більш того, функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то $\eta = f(c)$, де $a \leq c \leq b$.

3. Друга теорема про середнє. Якщо: 1) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ обмежені й відповідно, інтегровані на відрізку $[a, b]$; 2) функція $\varphi(x)$ монотонна при $a < x < b$, то існує точка $\xi \in [a, b]$, така, що

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f(x) dx + \varphi(b-0) \int_\xi^b f(x) dx.$$

Якщо, крім того, функція $\varphi(x)$ монотонно спадна і невід'ємна, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f(x) dx;$$

а якщо ж функція $\varphi(x)$ монотонно зростаюча і невід'ємна, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \varphi(b-0) \int_\xi^b f(x) dx.$$

Приклади розв'язування вправ

1. Знайти середнє значення функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на відрізку $[0, 1]$.

Розв'язування. Маємо $M[\sqrt[3]{x}] = \frac{1}{1-0} \int_0^1 x^{1/3} dx = \frac{3x^{4/3}}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{4}$.

2. Оцінити інтеграл $I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx$.

Розв'язування. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ спадає на відрізку $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$, оскільки її похідна

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{(x - \operatorname{tg} x) \cos x}{x^2} < 0.$$

Отже, найменше значення функції — $m = f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$, а найбільше значення функції — $M = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Тому

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \leq \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right),$$

тобто $0,22 \approx \frac{\sqrt{3}}{8} \leq I \leq \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0,24$.

3. Який з двох інтегралів $\int_0^1 \sqrt{x} dx$; $\int_0^1 x^3 dx$ більший?

Розв'язування. Відомо, що $\sqrt{x} > x^3$ при $0 < x < 1$. Тому

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx > \int_0^1 x^3 dx.$$

4. Визначити знак інтегралу $\int_{-2}^2 x \cdot 4^x dx$.

Розв'язування. Маємо

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 x \cdot 4^x dx &= \int_{-2}^0 x \cdot 4^x dx + \int_0^2 x \cdot 4^x dx = \int_0^2 x \cdot 4^{-x} dx + \int_0^2 x \cdot 4^x dx = \\ &= \int_0^2 x \left(4^x - \frac{1}{4^x}\right) dx > 0, \end{aligned}$$

оскільки підінтегральна функція $f(x) = x \left(4^x - \frac{1}{4^x}\right) > 0$ при $x \in (0, 2]$.

5. Оцінити інтеграл $I = \int_{30\pi}^{60\pi} \frac{\cos x}{x} dx$.

Розв'язування. За другою теоремою про середнє ($f(x) = \cos x$, $\varphi(x) = \frac{1}{x}$) маємо

$$I = \int_{30\pi}^{60\pi} \frac{\cos x}{x} dx = \frac{1}{30\pi} \int_{30\pi}^{\xi} \cos x dx = \frac{1}{30\pi} (\sin \xi - \sin 3\pi) = \frac{1}{30\pi} \sin \xi,$$

де точка $\xi \in [30\pi; 60\pi]$. Отже, $-\frac{1}{30\pi} \leq I \leq \frac{1}{30\pi}$.

Вправи

I. Обчислити інтеграли:

$$2.45. \int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx.$$

$$2.46. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2 + x + 1}.$$

$$2.47. \int_1^e (x \ln x)^2 dx.$$

$$2.48. \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx.$$

$$2.49. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$2.50. \int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx.$$

$$2.51. \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx.$$

$$2.52. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$$

$$2.53. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

$$2.54. \int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$

$$2.55. \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx.$$

$$2.56. \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx.$$

$$2.57. \int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^4 x dx.$$

$$2.58. I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

$$2.59. K_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx.$$

$$2.60. I_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x dx.$$

$$2.61. I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$$

$$2.62. I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2.63. I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx.$$

$$2.64. \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x dx.$$

$$2.65. \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \cos 2nx dx.$$

$$2.66. \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx.$$

$$2.67. \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx.$$

II. Визначити знаки наступних інтегралів:

$$2.68. \int_0^{2\pi} x \sin x dx;$$

$$2.69. \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$2.70. \int_{-2}^2 x^3 2^x dx;$$

$$2.71. \int_{1/2}^1 x^2 \ln x dx.$$

III. Який інтеграл більший:

$$2.72. \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx \text{ чи } \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx?$$

$$2.73. \int_0^1 e^{-x} dx \text{ чи } \int_0^1 e^{-x^2} dx?$$

$$2.74. \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx \text{ чи } \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx?$$

IV. Користуючись першою теоремою про середнє, оцінити інтеграли:

$$2.75. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0.5 \cos x}.$$

$$2.76. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$2.77. \int_0^{100} \frac{e^{-x} dx}{100+x}.$$

V. Користуючись другою теоремою про середнє, оцінити інтеграли:

$$2.78. \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$2.79. \int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x dx \quad (\alpha \geq 0).$$

$$2.80. \int_a^b \sin x^2 dx.$$

2.3. Обчислення площ

1. Площа в прямокутних координатах. Площа S плоскої фігури обмеженої двома неперервними кривими $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ ($y_2(x) \geq y_1(x)$) і двома прямими $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

2. Площа фігури, обмеженої кривими заданими в параметричному вигляді. Якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($0 \leq t \leq T$) — параметричне рівняння кусково гладкої простої замкнутої кривої C , що проходить проти годинникової стрілки і обмежує зліва від себе фігуру з площею S , то

$$S = - \int_0^T y(t)x'(t) dt = \int_0^T x(t)y'(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt.$$

3. Площа в полярних координатах. Площа S сектора, обмеженого неперервною кривою $r = r(\varphi)$ і двома променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), дорівнює

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Приклади розв'язування вправ

1. Обчислити площу фігури обмежену кривими $x = 0$, $x = 2$, $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$.

Розв'язування. Оскільки $2^x \geq 1$ на відрізку $[0, 2]$, а максимум функції $y = 2x - x^2$ на цьому відрізку дорівнює 1, то

$$S = \int_0^2 (2^x - (2x - x^2)) dx = \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_0^2 - \left. x^2 \right|_0^2 + \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}.$$

2. Обчислити площу фігури обмежену еліпсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Розв'язування. Оскільки

$$xy' - yx' = a \cos t \cdot b \cos t + a \sin t \cdot b \sin t = ab(\cos^2 t + \sin^2 t) = ab, \text{ то}$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

3. Знайти площу астроїди $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$.

Розв'язування. Запишемо рівняння астроїди в параметричному вигляді

$$x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi. \text{ Тоді}$$

$$xy' - yx' = a^2(\cos^3 t \cdot 3 \sin^2 t \cos t + \sin^3 t \cdot 3 \cos^2 t \sin t) = 3a^2 \cos^2 t \sin^2 t,$$

звідки

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt =$$

$$= \frac{3a^2}{16} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{8} a^2.$$

4. Знайти площу фігури, вирізається колом $r = \sqrt{3} \sin \varphi$ з кардіоїди $r = 1 + \cos \varphi$.

Розв'язування. Знаходимо точки перетину цих кривих. Маємо

$$\begin{cases} r = \sqrt{3} \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ r = 1 + \cos \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Звідси $\sqrt{3} \sin \varphi - \cos \varphi = 1$; $\sin(\varphi - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$; $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$; $\varphi_2 = \pi$. Тому

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} 3 \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{4} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi/3} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\varphi + 2 \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_{\pi/3}^{\pi} = \frac{3}{4} (\pi - \sqrt{3}).$$

Вправи

1. Знайти площу фігур, обмежених кривими, заданими в прямокутних координатах:

2.81. $ax = y^2, ay = x^2$.

2.82. $y = x^2, x + y = 2$.

2.83. $y = 2x - x^2, x + y = 0$.

2.84. $y = 2^x, y = 2, x = 0$.

2.85. $y = x, y = x + \sin^2 x (0 \leq x \leq \pi)$.

2.86. $y = \frac{a^2}{a^2 + x^2}, y = 0$.

2.87. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2.88. $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

- 2.89. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.
 2.90. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$.
 2.91. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.
 2.92. $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.
 2.93. $y = \ln x$, $y = \ln a$, $y = \ln b$, $x = 0$.
 2.94. $y = \frac{\ln x}{4x}$, $y = x \ln x$.
 2.95. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.
 2.96. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \frac{2}{3} \cos x$, $x = 0$.
 2.97. $y = |\lg x|$, $y = 0$, $x = 0, 1$, $x = 10$.
 2.98. $y = (x+1)^2$, $x = \sin \pi y$, $y = 0$ ($0 \leq y \leq 1$).
 2.99. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

II. Знайти площі фігур, обмежених кривими, заданими параметрично:

- 2.100. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) (циклоїда) і $y = 0$.
 2.101. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.
 2.102. $x = a \cos t$, $y = \frac{a \sin^2 t}{2 + \sin t}$.
 2.103. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) і $x = a$, $y \leq 0$.
 2.104. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$.
 2.105. $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$ ($c^2 = a^2 - b^2$) (еволюта еліпса).

III. Знайти площі фігур, обмежених кривими, заданими в полярних координатах:

- 2.106. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемніската).
 2.107. $r = a(1 + \cos \varphi)$ (кардіоида).
 2.108. $r = a \sin 3\varphi$ (трилисник).
 2.109. $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
 2.110. $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ ($0 < \varepsilon < 1$).
 2.111. $r = 3 + 2 \cos \varphi$.
 2.112. $r^2 + \varphi^2 = 1$.
 2.113. $r = \frac{1}{\varphi}$, $r = \frac{1}{\sin \varphi}$ ($0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$).
 2.114. $\varphi = r \operatorname{arctg} r$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.
 2.115. $\varphi = 4r - r^3$, $\varphi = 0$.
 2.116. $\varphi = r - \sin r$, $\varphi = \pi$.

2.4. Довжина дуги кривої. Об'єм тіла обертання

1. Довжина дуги в прямокутних координатах. Довжина дуги відрізка гладкої кривої $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$) дорівнює

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} \, dx.$$

2. Довжина дуги кривої, заданої параметрично. Якщо крива C задана рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t_0 \leq t \leq T$), де $x(t), y(t) \in C^{(1)}[t_0, T]$, то довжина дуги кривої C дорівнює

$$l = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \, dt.$$

3. Довжина дуги кривої в полярних координатах. Якщо $r = r(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$), де $r(\varphi) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$, то довжина дуги кривої дорівнює

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} \, d\varphi.$$

4. Об'єм тіла обертання. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ — неперервні невід'ємні функції, дорівнює

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)] \, dx.$$

Приклади розв'язування вправ

1. Обчислити довжину дуги напівкубічної параболи $y^2 = x^3$, що міститься між точками $(0;0)$ та $(4;8)$.

Розв'язування. Функція $y(x)$ визначена для $x \geq 0$. Оскільки задані точки лежать у I чверті, то $y = \sqrt{x^3}$. Звідси $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ і $\sqrt{1 + y'^2(x)} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$. Отже,

$$l = \int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

2. Обчислити довжину астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, 0π .

Розв'язування. Маємо

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t} = 3a |\sin t \cos t| = \frac{3a}{2} |\sin 2t|.$$

Оскільки функція $|\sin 2t|$ має період $\pi/2$, то

$$l = 4 \cdot \frac{3a}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 6a.$$

3. Знайти довжину замкненої кривої $r = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$.

Розв'язування. Оскільки функція $r = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$ парна, то задана крива симетрична відносно полярної осі. Враховуючи, що функція $\sin^4 \frac{\varphi}{4}$ має період 4π , то

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^8(\varphi/4) + \sin^6(\varphi/4) \cos^2(\varphi/4)} d\varphi = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin^3(\varphi/4) d\varphi = 8a \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt = -8a \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) d\cos t = \\ &= -8a \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}a. \end{aligned}$$

4. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox площі, обмеженої осями координат і параболою $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$.

Розв'язування. Знайдемо точки перетину кривої з осями координат: при $x = 0$ $y = a$, при $y = 0$ $x = a$. Отже,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a y^2(x) dx = \pi \int_0^a (a^{1/2} - x^{1/2})^4 dx = \\ &= \pi \int_0^a (a^2 - 4a^{3/2}x^{1/2} + 6ax - 4a^{1/2}x^{3/2} + x^2) dx = \frac{\pi a^3}{15}. \end{aligned}$$

Вправи

1. Знайти довжини дуг кривих:

2.117. $y = x^{3/2}$ ($0 \leq x \leq 4$).

2.118. $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$).

2.119. $y = e^x$ ($0 \leq x \leq x_0$).

2.120. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ ($1 \leq y \leq e$).

2.121. $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq b < a$).

2.122. $y = \ln \cos x$ ($0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}$).

2.123. $y = \ln x$ ($\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$).

2.124. $y = \ln(1 - x^2)$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$).

2.125. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ ($0 \leq x \leq \frac{5}{3}a$).

2.126. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ ($0 < b \leq y \leq a$).

II. Знайти довжини дуг кривих:

2.127. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

2.128. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

2.129. $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

2.130. $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$.

2.131. $x = \operatorname{ch}^3 t$, $y = \operatorname{sh}^3 t$ ($0 \leq t \leq T$).

III. Знайти довжини дуг кривих:

2.132. $r = a\varphi$ (спіраль Архімеда) ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). 2.133. $r = ae^{m\varphi}$ ($0 < r < a$).

2.134. $r = a(1 + \cos \varphi)$ (кардіоїда).

2.135. $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

2.136. $r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$.

2.137. $\varphi = \sqrt{r}$ ($0 \leq r \leq 5$).

2.138. $\varphi = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$ ($1 \leq r \leq 3$).

IV. Знайти об'єми тіл, обмеженими поверхнями, отриманими при обертанні відрізків наступних ліній:

2.139. $y = b \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}$ ($0 \leq x \leq a$) навколо осі Ox .

2.140. $y = 2x - x^2$, $y = 0$: а) навколо осі Ox ; б) навколо осі Oy .

2.141. $y = \sin x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$): а) навколо осі Ox ; б) навколо осі Oy .

2.142. $y = b \left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y = b \left|\frac{x}{a}\right|$: а) навколо осі Ox ; б) навколо осі Oy .

2.143. $y = e^{-x}$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq +\infty$): а) навколо осі Ox ; б) навколо осі Oy .

2.144. $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($0 < a \leq b$) навколо осі Ox .

2.145. $x^2 - xy + y^2 = a^2$ навколо осі Ox .

2.146. $y = e^{-x} \sqrt{\sin x}$ ($0 \leq x \leq +\infty$) навколо осі Ox .

2.5. Невластиві інтеграли

Ознаки збіжності та абсолютної збіжності.

1). Якщо $|f(x)| \leq F(x)$ при $x \geq a$ й інтеграл $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ збіжний, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ збігається абсолютно.

2). Якщо $\psi(x) > 0$ і $\varphi(x) = O(\psi(x))$ при $x \rightarrow +\infty$, то інтеграли $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ і $\int_a^{+\infty} \psi(x) dx$ збігаються або розбігаються одночасно. Зокрема, це справедливо, якщо $\varphi(x) \sim \psi(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

3). Нехай $f(x) = O\left(\frac{1}{x^p}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$. Тоді, якщо $p > 1$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ збігається; якщо $p \leq 1$, то інтеграл розбігається.

4). Нехай $f(x) = O\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right)$ при $x \rightarrow b-0$. Тоді, якщо $p < 1$, то інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ збігається; якщо $p \geq 1$, то інтеграл розбігається.

5). Спеціальна ознака збіжності. Якщо: 1) функція $g(x)$ монотонно прямує до нуля при $x \rightarrow +\infty$; 2) первісна $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ функції $f(x)$ є обмежена на $[a, +\infty)$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ збігається.

Зокрема, інтеграли $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ і $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ ($a > 0$) збігаються, якщо $p > 0$.

Приклади розв'язування вправ

1. Обчислити інтеграл $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

Розв'язування. Маємо

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \int_{e^2}^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = -\frac{1}{2 \ln^2 x} \Big|_{e^2}^{+\infty} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2 \ln^2 A} \right) = \frac{1}{8}.$$

2. Чи збіжний інтеграл $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$?

Розв'язування. Покладемо $u = x$, $dv = \sin x dx$ і проінтегрувавши частинами, отримаємо

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x \sin x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-x \cos x \Big|_0^A + \int_0^A \cos x \, dx \right) =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} (-A \cos A + \sin A).$$

Оскільки остання границя не існує, то інтеграл $\int_0^{+\infty} x \sin x \, dx$ розбіжний.

3. Дослідити на збіжність а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x}$; $\int_1^{+\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} dx$.

Розв'язування. а) Оскільки $\frac{1}{x + \sin^2 x} \sim \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow +\infty$, то за ознакою порівняння 3) інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sin^2 x}$ — розбіжний.

$$\text{Маємо } I = \int_1^{+\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = I_1 + I_2.$$

Оскільки інтеграл I_1 розбіжний (див. озн. 3)), а інтеграл I_2 — збіжний (див. ознаку 5)), то інтеграл I розбіжний, як сума збіжного та розбіжного інтегралів.

4. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[5]{x^3}} dx$.

Розв'язування.

$$I = \int_0^1 \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[5]{x^3}} dx = \int_0^1 x^{12/5} dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^{4/15}} - 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/5}} =$$

$$= \frac{5}{17} x^{17/5} \Big|_0^1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-4/15} dx - 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-3/5} dx =$$

$$= \frac{5}{17} + \frac{5}{11} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(x^{11/15} \Big|_{\varepsilon}^1 \right) - 5 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(x^{2/5} \Big|_{\varepsilon}^1 \right) = \frac{5}{17} + \frac{15}{11} - 5 = -\frac{625}{187}.$$

5. Дослідити на збіжність інтеграли а) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1 - \cos x}} dx$ та б) $\int_0^1 \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1 - x^3}} dx$.

Розв'язування. а) Оскільки $\frac{e^x}{\sqrt{1 - \cos x}} \sim \frac{1}{\sqrt{2 \sin \frac{x}{2}}} \sim \frac{\sqrt{2}}{x}$ при $x \rightarrow +0$, то за ознакою збіжності 4) інтеграл $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1 - \cos x}} dx$ — розбіжний.

б) При $x \rightarrow 1 - 0$ підінтегральна функція

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1 - x^3}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1 + x + x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{1 - x}} \sim \frac{\sin 1 + \cos 1}{\sqrt[5]{3}} \cdot \frac{1}{(1 - x)^{1/5}},$$

то за ознакою збіжності 4) інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[5]{1 - x^3}} dx$ — збіжний.

Вправи

I. Обчислити інтеграли:

$$2.147. \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (a > 0).$$

$$2.149. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$2.151. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}.$$

$$2.153. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$2.155. \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

$$2.157. \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$2.159. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0).$$

$$2.161. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$2.163. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2+1}.$$

$$2.165. \int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\ln x}.$$

$$2.167. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}.$$

$$2.169. \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$2.171. \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

$$2.173. \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$2.175. \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

$$2.148. \int_0^1 \ln x dx.$$

$$2.150. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2.152. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

$$2.154. \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

$$2.156. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$$

$$2.158. \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$$

$$2.160. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0).$$

$$2.162. \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx \quad (a > 0).$$

$$2.164. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

$$2.166. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}.$$

$$2.168. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$2.170. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$2.172. \int_0^{+\infty} x \sin x dx.$$

$$2.174. \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx.$$

$$2.176. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$2.177. \int_0^1 x \ln x \, dx.$$

$$2.179. \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$2.181. \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$2.183. \int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx.$$

$$2.178. \int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$2.180. \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}.$$

$$2.182. \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^3}} dx.$$

$$2.184. I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

II. Дослідити збіжність інтегралів:

$$2.185. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}.$$

$$2.187. \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

$$2.189. \int_1^{+\infty} \frac{x^n dx}{1+x^n} \quad (n \geq 0).$$

$$2.191. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx.$$

$$2.193. \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0).$$

$$2.195. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}.$$

$$2.197. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}.$$

$$2.199. \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$$

$$2.201. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$$

$$2.186. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2+1}}.$$

$$2.188. \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

$$2.190. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx \quad (a \neq 0).$$

$$2.192. \int_0^{+\infty} \frac{x^n \operatorname{arctg} x}{2+x^n} dx \quad (n \geq 0).$$

$$2.194. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

$$2.196. \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$2.198. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}.$$

$$2.200. \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx.$$

Розділ 3

Числові та функціональні ряди

3.1. Числові ряди. Ознаки збіжності знакосталих рядів

1. Ознаки збіжності. Числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

називається збіжним, якщо існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, де

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Інакше ряд (1) називається розбіжним.

2. Критерій Коші. Для збіжності ряду (1) необхідно і досить, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N = N(\varepsilon)) (\forall n > N) (\forall p > 0) : \left\{ |S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon \right\}.$$

3. Ознака порівняння. Нехай, крім ряду (1), маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2)$$

Якщо при $n \geq n_0$ виконується нерівність $0 \leq a_n \leq b_n$, то з збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1), а з розбіжності ряду (1) випливає розбіжність ряду (2).

4. Ознака Коші. Якщо $a_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) і $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то
а) при $q < 1$ ряд (1) збіжний; б) при $q > 1$ ряд (1) розбіжний.

5. Ознака Даламбера. Якщо $a_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то

а) при $q < 1$ ряд (1) збіжний; б) при $q > 1$ ряд (1) розбіжний.

6. Інтегральна ознака Коші. Якщо $f(x)$ ($x \geq 1$) — невід'ємна незростаюча неперервна функція, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігається або розбігається одночасно з інтегралом $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Приклади розв'язування вправ

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

Розв'язування. Маємо

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \\ &+ (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} + \sqrt{k-1}) + (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = \\ &= (1 - \sqrt{2}) + \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} = (1 - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}. \end{aligned}$$

$$\text{Звідси } S = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = 1 - \sqrt{2}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

Розв'язування. Якщо $\alpha \leq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ — розбіжний, оскільки не виконується необхідна умова збіжності числового ряду. Якщо $\alpha > 0$, то за інтегральною ознакою Коші маємо, що ряд збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $0 < \alpha \leq 1$. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $0 < \alpha \leq 1$.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ — збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $\alpha \leq 1$.

3. Дослідити збіжність наступних рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} \quad (b > 0); \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 + n^3 + 2}{3^n + n^2}.$$

Розв'язування. Оскільки $1 - \cos \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ при $n \rightarrow +\infty$, то за ознакою порівняння (див. приклад 2) ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$ — збіжний.

б) За ознакою Даламбера маємо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{b^n}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{n+1} = 0,$$

отже, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}$ збіжний при довільному ($b > 0$).

в) Оскільки

$$q = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^4 + n^3 + 2}{3^n + n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^4}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^4}{3} = \frac{1}{3},$$

то за ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 + n^3 + 2}{3^n + n^2}$ збіжний.

Вправи

I. Довести безпосередньо збіжність наступних рядів і знайти їх суми:

3.1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$

3.2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right).$

5 3.3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$

3.4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$

3.5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$

3.6. $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n \sin n\alpha \quad (|q| < 1).$

II. Дослідити збіжність рядів:

3.7. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}.$

3.8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{0,001}.$

3.9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$

3.10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}.$

3.11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1000n+1}.$

3.12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n-1}.$

3.13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$

3.14. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$

3.15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}.$

III. Користуючись критерієм Коші, довести збіжність наступних рядів:

3.16. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \quad (|a_n| < 10).$ 3.17. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{2^n}.$ 3.18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}.$

IV. Користуючись критерієм Коші, довести розбіжність наступних рядів:

3.19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$ 3.20. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ 3.21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$

V. Користуючись ознаками порівняння, Даламбера або Коші, дослідити збіжність наступних рядів:

$$3.22. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1000^n}{n!}.$$

$$3.24. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

$$3.26. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

$$3.28. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

$$3.30. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}.$$

$$3.32. \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

$$3.34. \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt{n^2+n+b}).$$

$$3.36. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}.$$

$$3.38. \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right).$$

$$3.40. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a \cos^2 n\pi/3}{2^n}.$$

$$3.42. \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$$

$$3.23. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

$$3.25. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

$$3.27. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

$$3.29. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{(n+1)/n}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

$$3.31. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n + 3^n}.$$

$$3.33. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}.$$

$$3.35. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 (\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}.$$

$$3.37. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1000 \cdot 1001 \cdot \dots \cdot (1000 + n - 1)}{(2n-1)!!}.$$

$$3.39. \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt[n]{n}}.$$

$$3.41. \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}) \cdot \dots \cdot (\sqrt{2} - \sqrt[2^{n+1}]{2}).$$

VI. Дослідити збіжність рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з наступними загальними членами:

$$3.43. u_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}.$$

$$3.44. u_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt[3]{1+x^4} dx}.$$

$$3.45. u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

$$3.46. u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$3.47. u_n = \int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx.$$

3.2. Ознаки збіжності знакозмінних рядів

1. *Ознака Лейбніца.* Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ ($b_n \geq 0$) збігається (взагалі кажучи, не абсолютно), якщо

а) $b_n \geq b_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) і

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

2. *Ознака Абеля.* Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (1)$$

збіжний, якщо:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний;

2) числа b_n ($n = 1, 2, \dots$) утворюють монотонну і обмежену послідовність.

3. *Ознака Діріхле.* Ряд (1) збігається, якщо:

1) часткові суми $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ обмежені в сукупності;

2) b_n монотонно прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$.

Приклади розв'язування вправ

1. Користуючись означенням збіжності ряду, дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Розв'язування.

$$\begin{aligned} S_{2k} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \dots - \left(\frac{1}{2k-2} - \frac{1}{2k-1}\right) - \frac{1}{2k}. \end{aligned}$$

З першого запису бачимо що послідовність (S_{2k}) зростаюча, а з другого — обмежена зверху числом 1. Отже, існує $S \in (0, 1)$ таке, що $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S$, а

значить ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ є збіжним.

2. Дослідити збіжність рядів: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$.

Розв'язування. а) Оскільки $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то загальний член ряду не прямує до нуля при $n \rightarrow +\infty$. Отже, цей ряд розбіжний.

б) Оскільки $b_n = \frac{1}{\ln^2 n} \searrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, і для довільного $k \in \mathbb{N}$ виконується

$$\left| \sum_{n=2}^k \cos \frac{\pi n^2}{n+1} \right| = \left| \sum_{n=2}^k \cos \left(\pi(n-1) + \frac{\pi}{n+1} \right) \right| =$$

$$= \left| \cos \frac{\pi}{k+1} - \cos \frac{\pi}{k} + \cos \frac{\pi}{k-1} - \dots + (-1)^k \cos \frac{\pi}{3} \right| \leq$$

$$\leq \cos \frac{\pi}{k+1} - (\cos \frac{\pi}{k} - \cos \frac{\pi}{k-1}) - \dots - (\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{4}) - \cos \frac{\pi}{3} \leq \cos \frac{\pi}{k+1} < 1,$$

то за ознакою Діріхле ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$ збіжний.

3. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt[n]{n}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{12}}{\ln n}$.

Розв'язування. а) Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n \sqrt[n]{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

є збіжним, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt[n]{n}}$ абсолютно збіжний.

б) За ознакою Діріхле ряд збіжний, бо $\frac{1}{\ln n} \searrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а для довільного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{12} \right| = \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{24} \sin \frac{(n+1)\pi}{24}}{\sin \frac{\pi}{24}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{24}}.$$

Розглянемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\sin \frac{\pi n}{12}|}{\ln n}$. Оскільки $\frac{|\sin \frac{\pi n}{12}|}{\ln n} \geq \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{12}}{\ln n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\ln n} - \frac{\cos \frac{\pi n}{6}}{\ln n} \right)$

і ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} - \left(\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \right)$, а ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{6}}{\ln n}$ — збіжний (за ознакою Діріхле), то ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\sin \frac{\pi n}{12}|}{\ln n}$ — розбіжний. Отже, заданий ряд умовно збіжний.

Вправи

I. Довести збіжність наступних рядів і знайти їх суми:

3.48. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$

3.49. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$

II. Використовуючи формулу $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$, де C — стала Ейлера і $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ знайти суми наступних рядів:

3.50. $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$

3.51. $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$

III. Дослідити збіжність рядів:

3.52. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$

$\frac{1}{2}$

3.53. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$

Кони рєс

$$3.54. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

$$3.56. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$$

$$3.58. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

$$3.60. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

$$3.55. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$$

$$3.57. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$$

$$3.59. \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2})$$

IV. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність наступні ряди:

$$3.61. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

$$3.63. \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right)$$

$$3.65. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

$$3.67. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n} + (-1)^{n-1})^p}$$

$$3.69. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$3.71. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$$

$$3.62. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}$$

$$3.64. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$$

$$3.66. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^p}$$

$$3.68. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}$$

$$3.70. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \frac{n^{100}}{2^n}$$

$$3.72. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$$

V. Дослідити на збіжність наступні ряди:

$$3.73. \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^p} + \dots$$

$$3.74. 1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$$

$$3.75. 1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \dots$$

$$3.76. 1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \dots$$

VI. Що можна сказати про суму двох рядів, з яких:

3.77. Один збіжний, а другий розбіжний;

3.78. Обидва ряди розбіжні?

VII. Знайти суми рядів:

$$3.79. \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right).$$

$$3.80. \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right). \quad 3.81. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}.$$

3.3. Функціональні послідовності та функціональні ряди

1. Рівномірна збіжність. Послідовність функцій $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ називається рівномірно збіжною на множині X , якщо:

- 1) існує гранична функція $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ($x \in X$) така, що
- 2) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N = N(\varepsilon)) (\forall n > N) (\forall x \in X) : (|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon)$.

2. Збіжність та рівномірна збіжність функціонального ряду. Множина X називається множиною збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, якщо в кожній точці x_0 множини X збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Функціональний ряд називається рівномірно збіжним на множині X , якщо послідовність його часткових сум рівномірно збіжна на множині X .

3. Ознака Вейерштрасса. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збіжний абсолютно і рівномірно на множині X , якщо:

- а) $\sup \{|u_n(x)| : x \in X\} \leq c_n$;
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ — збіжний.

4. Ознака Абеля. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ збіжний рівномірно на множині X , якщо:

- 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ збіжний рівномірно на множині X ;
- 2) функції $b_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) обмежені в сукупності на множині X і для кожного $x \in X$ послідовність b_n монотонна.

5. Ознака Діріхле. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ збіжний рівномірно на множині X , якщо:

- 1) часткові суми $\sum_{n=1}^N a_n(x)$ обмежені в сукупності;

2) послідовність $b_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) монотонна для кожного $x \in X$ і послідовність b_n рівномірно на X збігається до нуля при $n \rightarrow \infty$.

Приклади розв'язування вправ

1. Визначити множину збіжності рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n + y^n} \quad (x > 0, y > 0).$$

Розв'язування. а) Маємо $q = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n}{e^{nx}} \right|} = \frac{1}{e^x}$. Отже, за ознакою Коші при $x > 0$ функціональний ряд а) збіжний абсолютно ($q(x) < 1$), а при $x < 0$ розбіжний ($q(x) > 1$). При $x = 0$ функціональний ряд а) набуває вигляду $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ і є розбіжним. Таким чином, множиною збіжності та множиною абсолютної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ є інтервал $(0, -\infty)$.

б) Оскільки $\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}} = \frac{(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}}{n^x} \sim \frac{e^x}{n^x}$ при $n \rightarrow +\infty$, то множиною збіжності ряду б) є інтервал $(1, +\infty)$.

в) За ознакою Коші абсолютної збіжності числового ряду маємо

$$q(x, y) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n y^n}{x^n + y^n} \right|} = \frac{xy}{\max\{x, y\}} = \min\{x, y\},$$

отже, якщо $\min\{x, y\} < 1$, то функціональний ряд в) збіжний, а якщо $\min\{x, y\} > 1$, то — розбіжний.

Очевидно, що якщо $x = 1, y > 1$ або $y = 1, x > 1$, то відповідні функціональні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{1+y^n}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ є розбіжними (загальний член ряду прямує до одиниці при $n \rightarrow \infty$).

Отже множиною збіжності цього функціонального ряду є множина $\{(x, y) : 0 <$

2. Дослідити на рівномірну збіжність послідовності:

$$a) f_n(x) = n(x^{1/n} - 1), \quad 1 \leq x \leq a; \quad б) f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Розв'язування. а) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x$. Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq x \leq a} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}} - \ln a \right) = 0, \quad \text{то } n(x^{1/n} - 1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[1; a]} \ln x.$$

(Функція $\varphi(x) = n(x^{1/n} - 1) - \ln x$ зростаюча на $[1; a]$, бо

$$\varphi'(x) = \frac{x^{1/n} - 1}{x} \geq 0 \text{ на } [1; a]).$$

б) Очевидно, що $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 2} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2} - 1) = 0$, отже $\sqrt[n]{1+x^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0;2]} f(x)$.

Вправи

I. Визначити множину збіжності наступних функціональних рядів:

3.82. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$.	3.83. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$.
3.84. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n$.	3.85. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$.
3.86. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 3^{2n}}{2n} x^n (1-x)^n$.	3.87. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n$.
3.88. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$.	3.89. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.
3.90. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+x^q}$ ($q < 0, x \in (0; \pi)$).	3.91. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n} \right)^n$.
3.92. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.	3.93. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2) \dots (1+x^n)}$.
3.94. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}$ ($y \geq 0$).	3.95. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{ x ^{n^2} + y ^{n^2}}$.
3.96. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$ ($x \geq 0$).	

II. Дослідити послідовності на рівномірну збіжність у вказаних проміжках:

3.97. $f_n(x) = x^n; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

3.98. $f_n(x) = x^n; 0 \leq x \leq 1$.

3.99. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}; 0 \leq x \leq 1$.

3.100. $f_n(x) = x^n - x^{2n}; 0 \leq x \leq 1$.

3.101. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}; 0 < x < +\infty$.

3.102. $f_n(x) = \frac{nx}{1+x+n}; 0 \leq x \leq 1$.

$$3.103. f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}; -\infty < x < +\infty.$$

$$3.104. f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}; 0 \leq x \leq 1-\varepsilon; \varepsilon > 0.$$

$$3.105. f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}; 1 < x < +\infty.$$

$$3.106. f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}; 1+\varepsilon \leq x < +\infty; \varepsilon > 0.$$

$$3.107. f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}; 0 \leq x \leq 1.$$

$$3.108. f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}; 1-\varepsilon \leq x \leq 1+\varepsilon; \varepsilon > 0.$$

$$3.109. f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}; -\infty < x < +\infty.$$

$$3.110. f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right); 0 < x < +\infty.$$

$$3.111. f_n(x) = \sin \frac{x}{n}; -\infty < x < +\infty.$$

$$3.112. f_n(x) = \operatorname{arctg} nx; 0 < x < +\infty.$$

$$3.113. f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx; 0 < x < +\infty.$$

$$3.114. f_n(x) = e^{n(x-1)}; 0 < x < 1.$$

$$3.115. f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}; 0 < x < 1.$$

$$3.116. f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n; a < x < b.$$

$$3.117. f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n; -\infty < x < +\infty.$$

III. Дослідити на збіжність та рівномірну збіжність наступні функціональні ряди:

$$3.118. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

$$3.119. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (0, +\infty).$$

$$3.120. \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < q, \text{ де } q < 1.$$

$$3.121. \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$

$$3.122. \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n, \quad x \in [0, 1].$$

$$3.123. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right), \quad x \in [-1, 1].$$

$$3.124. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}, \quad x \in (0, +\infty).$$

$$3.125. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}, \quad x \in (0, +\infty).$$

IV. Використовуючи ознаку Вейєрштрасса, довести рівномірну збіжність у вказаних проміжках наступних функціональних рядів:

$$3.126. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$3.127. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}, \quad x \in (-2, +\infty).$$

$$3.128. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}, \quad x \in [0, +\infty).$$

$$3.129. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$3.130. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{x^4 + n^4}}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$3.131. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$3.132. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$3.133. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

V. Визначити область існування функції і дослідити її на диференційованість:

$$3.134. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x}.$$

$$3.135. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

VI. Знайти:

$$3.136. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n + 1}.$$

$$3.137. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}).$$

$$3.138. \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}.$$

$$3.139. \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2 x^2}.$$

3.4. Степеневі ряди

1. Інтервал збіжності. Радіусом збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (*)$$

називається число $R > 0$ таке, що ряд $(*)$ збіжний на множині $\{x : |x - x_0| < R\}$ і розбіжний на множині $\{x : |x - x_0| > R\}$. Якщо степеневий ряд $(*)$ збіжний лише в точці x_0 , то покладаємо $R = 0$; якщо ряд $(*)$ збіжний при всіх $x \in \mathbb{R}$, то $R = +\infty$.

Радіус збіжності R визначається за формулою Коші-Адамара

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Інтервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ називається інтервалом збіжності степеневому ряду (*). В точках $x = x_0 - R$ та $x = x_0 + R$ ряд може збігатись або розбігатись.

Зауважимо, що на інтервалі збіжності степеневий ряд збігається абсолютно.

Якщо існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = l$, то радіус збіжності $R = l$.

2. Ряд Тейлора. Якщо функція $f(x)$ у деякому околі точки x_0 розвивається в степеневий ряд (*), то f називається аналітичною у точці x_0 функцією.

Виявляється, що тоді коефіцієнти

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

тобто аналітична функція f зображується своїм рядом Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in U(x_0).$$

3. Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < R,$$

збіжний у межовій точці $x = R$ інтервалу збіжності $(-R, R)$, то

$$\lim_{x \rightarrow R-0} S(x) = \lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n \equiv S(R).$$

4. Основні розвинення.

а) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$

б) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$

в) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$

г) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots, \quad -1 < x < 1.$

д) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x < 1.$

Приклади розв'язування вправ

1. Знайти радіус збіжності і дослідити поведінку в межових точках інтервалу збіжності степеневих рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

Розв'язування. а) За формулою Коші-Адамара маємо $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$, отже, $(-2, 0)$ є інтервалом збіжності ряду а). Дослідимо ряд на збіжність у точці $x = -2$. Отримуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, який є умовно збіжним. При $x = 0$ отримуємо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним. Отже, на $(-2, 0)$ ряд збіжний абсолютно, а на $[-2, 0)$ – умовно збіжний.

$$\text{б) } R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e},$$

отже, $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ інтервал збіжності ряду б). При $x = \frac{1}{e}$ отримуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Знайдемо асимптотику загального члену b_n при $n \rightarrow \infty$. Маємо

$$b_n = e^{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \cdot e^{-n} = e^{n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n} = e^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

а. значить, ряд в точці $x = \frac{1}{e}$ розбіжний.

Аналогічно показується, що ряд розбіжний і в точці $x = -\frac{1}{e}$.

2. Розвинути за степенями x наступні функції:

$$\text{а) } f(x) = \frac{x^{10}}{1-x}; \quad \text{б) } f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \quad \text{в) } f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Розв'язування. а) Згідно формули г) п. 4 для $|x| < 1$

$$f(x) = x^{10}(1-x)^{-1} = x^{10}(1+(-x))^{-1} = (1-(-x)+(-x)^2-(-x)^3+\dots) = x^{10}(1+x+x^2+x^3+\dots) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+10} = \sum_{n=10}^{+\infty} x^n.$$

б) За формулою д) п. 4 для $|x| < 1$ отримуємо

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\right) - \frac{1}{2}\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

в) Для похідної функції $f(x)$ при $|x| < 1$ маємо

$$f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Оскільки степеневий ряд можна почленно інтегрувати вздовж відрізка з інтервалу збіжності, то ми отримуємо для $|x| < 1$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Останній ряд збіжний в точках $x = 1$ та $x = -1$, тому за допомогою теореми Абеля маємо

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Вправи

Визначити радіус та інтервал збіжності й дослідити поведінку в граничних точках інтервалу збіжності наступних степеневих рядів:

$$3.140. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}.$$

$$3.141. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot (x+1)^n.$$

$$3.142. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot x^n.$$

$$3.143. \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n \quad (0 < \alpha < 1).$$

$$3.144. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n.$$

$$3.145. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\alpha^{n^2}} \cdot x^n \quad (\alpha > 1).$$

$$3.146. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}\right)^p \left(\frac{x-2}{2}\right)^n.$$

$$3.147. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n.$$

$$3.148. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \cdot x^n.$$

$$3.149. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n \quad (a > 0, b > 0).$$

$$3.150. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$3.151. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a\sqrt{n}} \quad (a > 0).$$

$$3.152. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

$$3.153. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot x^n.$$

$$3.154. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n.$$

$$3.155. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

$$3.156. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n)^n}{n} \cdot x^n.$$

$$3.157. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2 \cos \frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} \cdot x^n.$$

$$3.158. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$$

$$3.159. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} \cdot x^n.$$

II. Розкласти наступні функції за цілими невід'ємними степенями змінної x і знайти відповідні інтервали збіжності:

$$3.160. f(x) = \operatorname{sh} x.$$

$$3.161. f(x) = \operatorname{ch} x.$$

$$3.162. f(x) = \sin^2 x.$$

$$3.163. f(x) = a^x \quad (a > 0).$$

$$3.164. f(x) = \sin(\mu \arcsin x).$$

$$3.165. f(x) = \cos(\mu \arcsin x).$$

III. Використовуючи головні розвинення а) - д), розкласти в степеневий ряд відносно x наступні функції:

$$3.166. e^{-x^2}.$$

$$3.167. \cos^2 x.$$

$$3.168. \sin^2 x.$$

$$3.169. \frac{x^{10}}{1-x}.$$

$$3.170. \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$3.171. \frac{x}{\sqrt{1-2x}}.$$

$$3.172. \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$3.173. \frac{x}{1+x-2x^2}.$$

$$3.174. \frac{12-5x}{6-5x-x^2}.$$

$$3.175. \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}.$$

$$3.176. \frac{1}{1-x-x^2}.$$

$$3.177. \frac{1}{1+x+x^2}.$$

$$3.178. \frac{x \cos \alpha - x^2}{1-2x \cos \alpha + x^2}.$$

$$3.179. \frac{x \sin \alpha}{1-2x \cos \alpha + x^2}.$$

$$3.180. \frac{x \operatorname{sh} \alpha}{1-2x \operatorname{ch} \alpha + x^2}.$$

IV. Розклавши попередньо похідні, шляхом почленного інтегрування отримати розклад у степеневий ряд наступні функції:

$$3.181. f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

$$3.182. f(x) = \arcsin x.$$

$$3.183. f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$3.184. f(x) = \ln(1-2x \cos \alpha + x^2).$$

V. Використовуючи різні методи, знайти розклад в степеневий ряд наступних функцій:

$$3.185. f(x) = (1+x) \ln(1+x).$$

$$3.186. f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

$$3.187. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}.$$

$$3.188. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{2-2x^2}.$$

$$3.189. f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}.$$

$$3.190. f(x) = \arccos(1-2x^2).$$

$$3.191. f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$3.192. f(x) = (1+x)e^{-x}.$$

$$3.193. f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}. \quad 3.194. f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch} \sqrt{x}.$$

3.195. $f(x) = \ln^2(1 - x)$.

3.196. $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$.

3.197. $f(x) = e^x \cos x$.

3.198. $f(x) = e^x \sin x$.

3.199. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

3.200. $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$.

3.5. Ряди Фур'є

Теорема про розвинення. Якщо функція $f(x)$ кусково-неперервна і має кусково-неперервну похідну $f'(x)$ на інтервалі $(-l, l)$, причому її точки розриву ξ регулярні, тобто $f(\xi) = \frac{1}{2}(f(\xi - 0) + f(\xi + 0))$, то функція $f(x)$ на цьому інтервалі може бути розвинена в ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Приклади розв'язування вправ

Розвинути в ряд Фур'є: а) $f(x) = x^2$ в інтервалі $(-\pi; \pi)$;

б) $f(x) = \sin^3 x$ на $\mathbb{R}$.

Розв'язування. а) Оскільки функція $f(x) = x^2$ на $(-\pi; \pi)$ є парною, то $b_n = 0$.

$$\text{Далі } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left(-x \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \frac{4(-1)^n}{n^3}. \end{aligned}$$

Отже, $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$, $x \in (-\pi, \pi)$. При $x = 0$ отримуємо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

$$6) \sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \sin x = \frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x, \\ x \in \mathbb{R}.$$

Вправи

I. Розвинути в ряд Фур'є у вказаних інтервалах наступні функції:

$$3.201. f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l; \\ 0, & l < x < 2l, \end{cases} \quad \text{де } A - \text{ стала, в інтервалі } (0, 2l).$$

$$3.202. f(x) = x \text{ в інтервалі } (-\pi, \pi).$$

$$3.203. f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ в інтервалі } (0, 2\pi).$$

$$3.204. f(x) = |x| \text{ в інтервалі } (-\pi, \pi).$$

$$3.205. f(x) = \pi^2 - x^2 \text{ в інтервалі } (-\pi, \pi).$$

$$3.206. f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x < 0; \\ bx, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad \text{де } a \text{ і } b - \text{ сталі, в інтервалі } (-\pi, \pi).$$

$$3.207. f(x) = \cos ax \text{ в інтервалі } (-\pi, \pi) (a \notin \mathbb{Z}).$$

$$3.208. f(x) = \sin ax \text{ в інтервалі } (-\pi, \pi) (a \notin \mathbb{Z}).$$

$$3.209. f(x) = \operatorname{sh} ax \text{ в інтервалі } (-\pi, \pi).$$

$$3.210. f(x) = e^{ax} \text{ в інтервалі } (-h, h).$$

$$3.211. f(x) = x \text{ в інтервалі } (a, a + 2l).$$

$$3.212. f(x) = x \sin x \text{ в інтервалі } (-\pi, \pi).$$

$$3.213. f(x) = x \cos x \text{ в інтервалі } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

II. Розвинути в ряди Фур'є наступні періодичні функції:

$$3.214. f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x).$$

$$3.215. f(x) = \arcsin(\sin x).$$

$$3.216. f(x) = \arcsin(\cos x).$$

$$3.217. f(x) = x - [x].$$

$$3.218. f(x) = |\sin x|.$$

$$3.219. f(x) = |\cos x|.$$

Розділ 4

Функції багатьох змінних

4.1. Функції багатьох змінних. Границя функції. Неперервність

1. Границя функції. Нехай функція $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначена на множині E , P_0 — точка скупчення E . Вважатимемо, що $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$, якщо

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in E : 0 < \varrho(P, P_0) < \delta) \Rightarrow |f(P) - A| < \epsilon,$$

де $\varrho(P, P_0)$ — відстань між точками P та P_0 .

2. Неперервність. Функція $f(P)$ називається неперервною в точці P_0 , якщо

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

Функція називається неперервною в області, якщо вона неперервна в кожній точці області.

3. Рівномірна неперервність. Функція $f(P)$ називається рівномірно неперервною в області G , якщо

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P_1, P_2 \in G : 0 < \varrho(P_1, P_2) < \delta) \Rightarrow |f(P_1) - f(P_2)| < \epsilon.$$

Приклади розв'язування вправ

1. Чи існує границя $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$?

Розв'язування. Візьмемо послідовності точок $P_n \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ та $Q_n \left(0; \frac{1}{n}\right)$, які збігаються до точки $O(0; 0)$. Тоді $f(P_n) = \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 1$, а $f(Q_n) = \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot 0}{0^2 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отже, границі $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ не існує.

2. Знайти а) $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$; б) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x}$.

Розв'язування. Оскільки $0 \leq \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2}$ і $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2} = 0$, то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} = 0.$$

б) Маємо $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \left(\frac{\sin xy}{xy} \right) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} y = 1 \cdot a = a$.

3. Чи буде функція $f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$ рівномірно неперервною в області $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$?

Розв'язування. Візьмемо дві послідовності точок $P_n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}; 0 \right)$ та

$Q_n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2+n}}; 0 \right)$ з області E . Очевидно, що $\rho(P_n, Q_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, а $|f(P_n) - f(Q_n)| = |\sin(\pi n) - \sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)| = 1$, отже, функція не є рівномірно неперервною на E .

Вправи

I. Визначити і зобразити області існування наступних функцій:

4.1. $u = x + \sqrt{y}$.

4.2. $u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$.

4.3. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

4.4. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

4.5. $u = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$.

4.6. $u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$.

4.7. $u = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}$.

4.8. $u = \ln(-x - y)$.

4.9. $u = \arcsin \frac{y}{x}$.

4.10. $u = \arccos \frac{x}{x + y}$.

4.11. $u = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$.

4.12. $u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.

4.13. $u = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

4.14. $u = \ln(xyz)$.

II. Побудувати лінії рівня наступних функцій:

4.15. $z = x + y$.

4.16. $z = x^2 + y^2$.

4.17. $z = x^2 - y^2$.

$$\begin{aligned} 4.18. z &= (x+y)^2. & 4.19. z &= \frac{y}{x}. & 4.20. z &= \frac{1}{x^2 + 2y^2}. \\ 4.21. z &= \sqrt{yx}. & 4.22. z &= |x| + y. & 4.23. z &= \min(x, y). \\ 4.24. z &= \min(x^2, y). & 4.25. z &= \max(|x|, |y|). \end{aligned}$$

III. Показати, що а) для функції $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = 1; \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = -1, \text{ і } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \text{ не існує;}$$

б) для функції $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$ маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = 0, \text{ і } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \text{ не існує.}$$

IV. Знайти $\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right\}$ і $\lim_{y \rightarrow b} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right\}$, якщо:

$$4.26. f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, a = \infty, b = \infty;$$

$$4.27. f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^y}, a = \infty, b = +0;$$

$$4.28. f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}, a = \infty, b = \infty;$$

$$4.29. f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}, a = 0, b = \infty.$$

V. Знайти наступні подвійні границі:

$$4.30. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}.$$

$$4.31. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}.$$

$$4.32. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}.$$

$$4.33. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$$

$$4.34. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2/(x+y)}.$$

$$4.35. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

VI. Знайти точки розриву наступних функцій:

$$4.36. u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$4.37. u = \frac{xy}{x+y}.$$

$$4.38. u = \frac{x+y}{x^3 + y^3}.$$

$$4.39. u = \sin \frac{1}{xy}.$$

$$4.40. u = \frac{1}{\sin x \sin y}.$$

$$4.41. u = \ln(1 - x^2 - y^2).$$

VII. Чи є функція u рівномірно неперервною на множині E ?

$$4.42. u = 2x - 3y + 5, E = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}.$$

$$4.43. u = \sqrt{x^2 + y^2}, E = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}.$$

$$4.44. u = \arcsin \frac{x}{y}, E \text{ — область визначення.}$$

4.2. Часткові похідні. Диференціал функції

1. Часткові похідні. Границя

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = f'_x(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0).$$

називається *частковою похідною* за змінною x функції $f(x, y, z)$ в точці $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Аналогічно визначаються часткові похідні f'_y та f'_z , відповідно, за змінними y та z .

2. Диференціал функції. Якщо повний приріст

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

функції $f(x, y, z)$ в точці $P_0(x_0, y_0, z_0)$ можна зобразити у вигляді

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho), \quad \rho \rightarrow 0,$$

де A, B, C — сталі і $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, то функція $f(x, y, z)$ називається *диференційовною* в точці P_0 . Лінійна частина приросту $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$, яка дорівнює

$$df(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)dx + f'_y(x_0, y_0, z_0)dy + f'_z(x_0, y_0, z_0)dz,$$

де $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, називається *диференціалом* цієї функції в точці P_0 .

3. Похідна складної функції. Якщо $w = f(x, y, z)$, де $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$ і функції φ, ψ, χ диференційовані, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}$$

Приклади розв'язування вправ

1. Знайти часткові похідні першого порядку функцій:

а) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; б) $u = x^{y/z}$.

Розв'язування.

а) $u'_x = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2)^{-3/2} \cdot 2x = \frac{-x}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}$; $u'_y = \frac{y}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}$.

б) $u'_x = \frac{y}{z}x^{y/z-1}$; $u'_y = x^{y/z} \frac{\ln x}{z}$; $u'_z = x^{y/z} \frac{-y \ln x}{z^2}$.

2. Знайти диференціали першого та другого порядку функцій:

а) $u = xy + xz + yz$; б) $u = \frac{z}{x^2 + y^2}$.

Розв'язування. а) $du = (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz$,

$$d^2u = d(du) = (dy + dz)dx + (dx + dz)dy + (dx + dy)dz = 2dxdy + 2dxdz + 2dydz.$$

б) $du = \frac{-2xz}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dx + \frac{-2yz}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dy + \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot dz$,

$$d^2u = u''_{xx}dx^2 + u''_{yy}dy^2 + u''_{zz}dz^2 + 2u''_{xy}dxdy + 2u''_{xz}dxdz + 2u''_{yz}dydz =$$

$$= \frac{-2z(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3} \cdot dx^2 + \frac{-2z(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \cdot dy^2 + 0 \cdot dz^2 + \frac{16xyz}{(x^2 + y^2)^3} \cdot dxdy +$$

$$+ \frac{-4x}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dxdz + \frac{-4y}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dydz.$$

3. Знайти похідні першого та другого порядку від заданих функцій (x, y, z) — незалежні змінні):

а) $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$; б) $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, де $\xi = ax$, $\eta = by$, $\zeta = cz$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Розв'язування. а) $u'_x = f'_1 \cdot \frac{1}{y} + f'_2 \cdot 0 = \frac{1}{y}f'_1$; $u'_y = f'_1 \cdot \frac{-x}{y^2} + f'_2 \cdot \frac{1}{z} = -\frac{x}{y^2}f'_1 + \frac{1}{z}f'_2$;

$$u'_z = f'_1 \cdot 0 + f'_2 \cdot \frac{-y}{z^2} = -\frac{y}{z^2}f'_2;$$

$$u''_{xx} = \frac{1}{y^2}f''_{11}; u''_{yy} = \frac{2x}{y^3}f'_1 - \frac{x}{y^2}\left(f''_{11}\left(-\frac{x}{y^2}\right) + f''_{12}\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}\left(f''_{21}\left(-\frac{x}{y^2}\right) + f''_{22}\frac{1}{z}\right) =$$

$$= \frac{2x}{y^3}f'_1 + \frac{x^2}{y^4}f''_{11} - \frac{2x}{zy^2}f''_{12} + \frac{1}{z^2}f''_{22};$$

$$u''_{xz} = \frac{2y}{z^3}f'_2 - \frac{y}{z^2}\left(f''_{21} \cdot 0 + f''_{22}\left(\frac{-y}{z^2}\right)\right) = \frac{2y}{z^3}f'_2 + \frac{y^2}{z^4}f''_{22};$$

$$u''_{zx} = u''_{xz} = \frac{1}{y}\left(f''_{11} \cdot 0 + f''_{12}\left(\frac{-x}{y^2}\right)\right) = -\frac{1}{z^2}f''_{12};$$

$$u''_{xy} = u''_{yx} = -\frac{1}{y^2}f'_1 + \frac{1}{y}\left(f''_{11}\left(\frac{-x}{y^2}\right) + f''_{12}\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{y^2}f'_1 - \frac{x}{y^3}f''_{11} + \frac{1}{yz}f''_{12};$$

$$u''_{yz} = u''_{zy} = -\frac{x}{y^2}\left(f''_{11} \cdot 0 + f''_{12}\left(\frac{-y}{z^2}\right)\right) - \frac{1}{z^2}f'_2 + \frac{1}{z}\left(f''_{21} \cdot 0 + f''_{22}\left(\frac{-y}{z^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{x}{yz^2}f''_{12} - \frac{1}{z^2}f'_2 - \frac{y}{z^3}f''_{22}.$$

б) $u'_x = f'_\xi \cdot a$; $u'_y = f'_\eta \cdot b$; $u'_z = f'_\zeta \cdot c$;

$$u''_{xx} = a^2 \cdot f''_{\xi\xi}; u''_{yy} = b^2 \cdot f''_{\eta\eta}; u''_{zz} = c^2 \cdot f''_{\zeta\zeta};$$

$$u''_{xy} = u''_{yx} = abf''_{\xi\eta}; u''_{xz} = u''_{zx} = abf''_{\xi\zeta}; u''_{yz} = u''_{zy} = bcf''_{\eta\zeta}.$$

IV. Знайти диференціали першого і другого порядку від наступних функцій:

4.65. $u = x^m y^n$.

4.66. $u = \frac{x}{y}$.

4.67. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.68. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.69. $u = e^{xy}$.

4.70. $u = xy + xz + yz$.

4.71. $u = \frac{z}{x^2 + y^2}$.

V. Знайти повні диференціали вказаного порядку від наступних функцій:

4.72. d^3u , якщо $u = \sin(x^2 + y^2)$.

4.73. d^3u , якщо $u = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$.

4.74. $d^{10}u$, якщо $u = \ln(x + y)$.

4.75. d^6u , якщо $u = \cos x \operatorname{ch} y$.

4.76. d^3u , якщо $u = xyz$.

4.77. d^4u , якщо $u = \ln(x^x y^y z^z)$.

4.78. $d^n u$, якщо $u = e^{ax+by}$.

4.79. $d^n u$, якщо $u = X(x)Y(y)$.

4.80. $d^n u$, якщо $u = f(x + y + z)$.

4.81. $d^n u$, якщо $u = e^{ax+by+cz}$.

VI. Знайти похідні першого і другого порядку від наступних складних функцій:

4.82. $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

4.83. $u = f(x, \frac{x}{y})$.

4.84. $u = f(x, xy, xyz)$.

4.85. $u = f(x + y, xy)$.

VII. Знайти повні диференціали першого і другого порядку від наступних складних функцій (x, y, z — незалежні змінні):

4.86. $u = f(t)$, де $t = x + y$.

4.87. $u = f(t)$, де $t = y/x$.

4.88. $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

4.89. $u = f(\xi, \eta)$, де $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

4.90. $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

4.91. $u = f(\xi, \eta)$, де $\xi = ax$, $\eta = by$.

4.92. $u = f(t)$, де $t = xyz$.

4.93. $u = f(\xi, \eta)$, де $\xi = xy$, $\eta = x/y$.

4.94. $u = f(x + y, z)$.

4.95. $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$.

4.96. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, де $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$, $\zeta = 2xy$.

VIII. Вважаючи, що $z = z(x, y)$, розв'язати наступні рівняння:

4.97. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

4.98. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

4.99. $\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0$.

4.100. Вважаючи, що $u = u(x, y, z)$, розв'язати рівняння $\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} = 0$.

4.101. Знайти розв'язок $z = z(x, y)$ рівняння $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, що задовольняє умову $z(x, x^2) = 1$.

4.102. Знайти розв'язок $z = z(x, y)$ рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, що задовольняє умови: $z(x, 0) = 1$, $z'_y(x, 0) = x$.

4.103. Знайти розв'язок $z = z(x, y)$ рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, що задовольняє умови: $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$.

IX. Вважаючи, що функції φ , ψ і т.д. диференційовані достатню кількість разів, перевірити рівності:

4.104. $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, якщо $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

4.105. $x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, якщо $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$.

4.106. $(x^2 - y^2) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$, якщо $z = e^y \varphi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$.

4.107. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.

4.108. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, якщо $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$.

4.109. $x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, якщо $u = \varphi(y/x) + x\psi(y/x)$.

Зміст

РОЗДІЛ I. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	4
1.1. Безпосереднє інтегрування за таблицею інтегралів	4
1.2. Основні методи інтегрування	7
1.3. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен	9
1.4. Інтегрування раціональних функцій	13
1.5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій	16
1.6. Інтегрування тригонометричних функцій	20
РОЗДІЛ II. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	23
2.1. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца	23
2.2. Обчислення інтегралів. Теорема про середнє	27
2.3. Обчислення площ	31
2.4. Довжина дуги кривої. Об'єм тіла обертання	33
2.5. Невластиві інтеграли	37
РОЗДІЛ III. ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ	41
3.1. Числові ряди. Ознаки збіжності знакосталих рядів	41
3.2. Ознаки збіжності знакозмінних рядів	45
3.3. Функціональні послідовності та функціональні ряди	48
3.4. Степеневі ряди	52
3.5. Ряди Фур'є	56
РОЗДІЛ IV. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ	59
4.1. Функції багатьох змінних. Границя функції. Неперервність ..	59
4.2. Часткові похідні. Диференціал функції	62